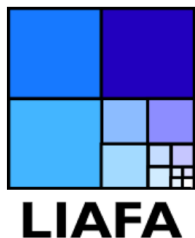


**Journées Graphes et Algorithmes 2006 - Orléans**

***Graphes 2-intervallaires  
et classes apparentées***

**Philippe Gambette**



# Plan

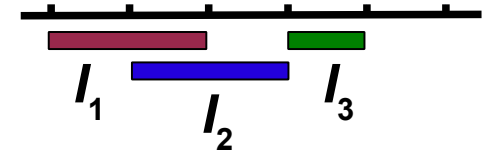
---

- Quelques classes de graphes d'intersection
- Graphes 2-intervallaires équilibrés
- Quelques motivations pour les 2-intervallaires
- Problème du stable maximum
- Variantes de la classe des graphes 2-intervallaires
- Graphes  $\{\cap, \square\}$ -(1,1)-intervallaires

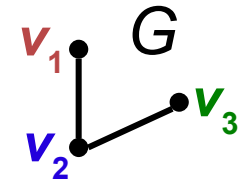
# Les graphes d'intervalles

un **sommet**  $\Leftrightarrow$  un **intervalle**

$$\mathcal{I} = \{[0,2], [1,3], [3,4]\}$$



une **arête**  
entre deux  
sommets  $\Leftrightarrow$  les deux intervalles  
ont une **intersection**  
**non vide**



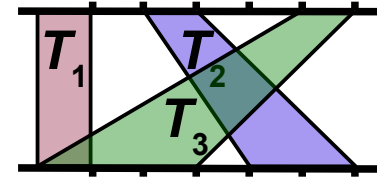
$\mathcal{I}$  est une **réalisation** du **graphe d'intersection**  $G$ .

$G$  est un **graphe d'intervalles**.

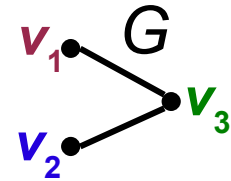
# Les graphes trapézoïdaux

un **sommet**  $\Leftrightarrow$  un **trapèze** entre deux lignes horizontales

$$\mathcal{T} = \{([0,1],[0,1]), ([2,3],[4,6]), ([5,6],[0,3])\}$$



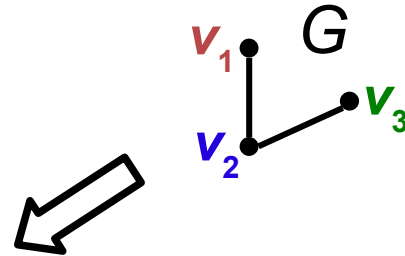
une **arête** entre deux sommets  $\Leftrightarrow$  les deux trapèzes ont une **intersection non vide**



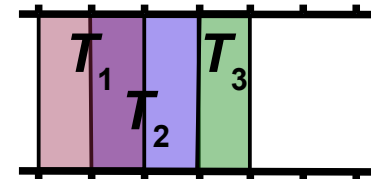
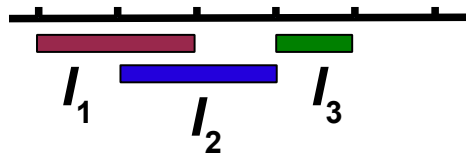
G est un *graphe trapézoïdal*.

# Classes de graphes

Tout graphe d'intervalles est un graphe trapézoïdal.

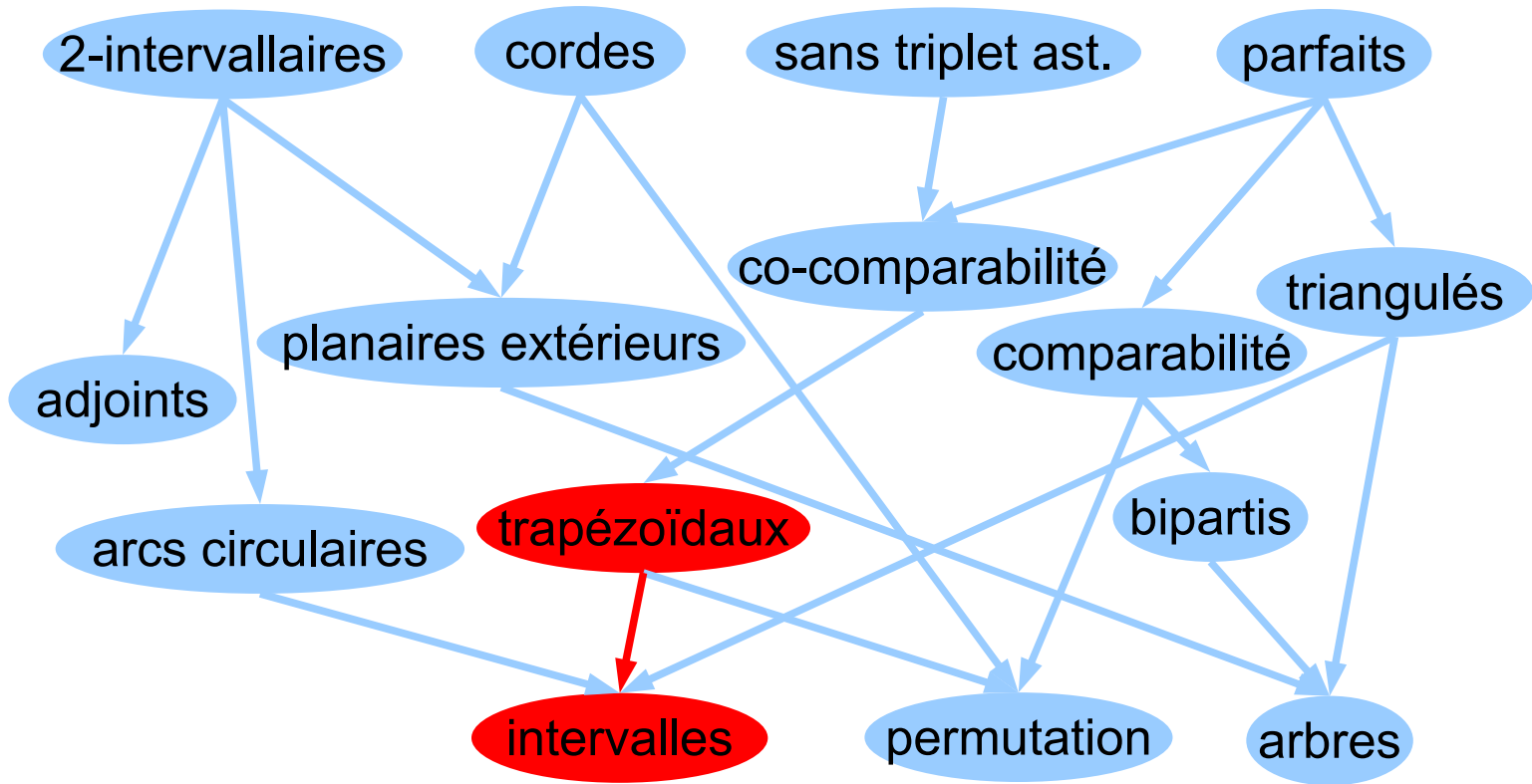


$$\mathcal{I} = \{[0,2], [1,3], [3,4]\} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{T} = \{([0,2],[0,2]), ([1,3],[1,3]), ([3,4],[3,4])\}$$

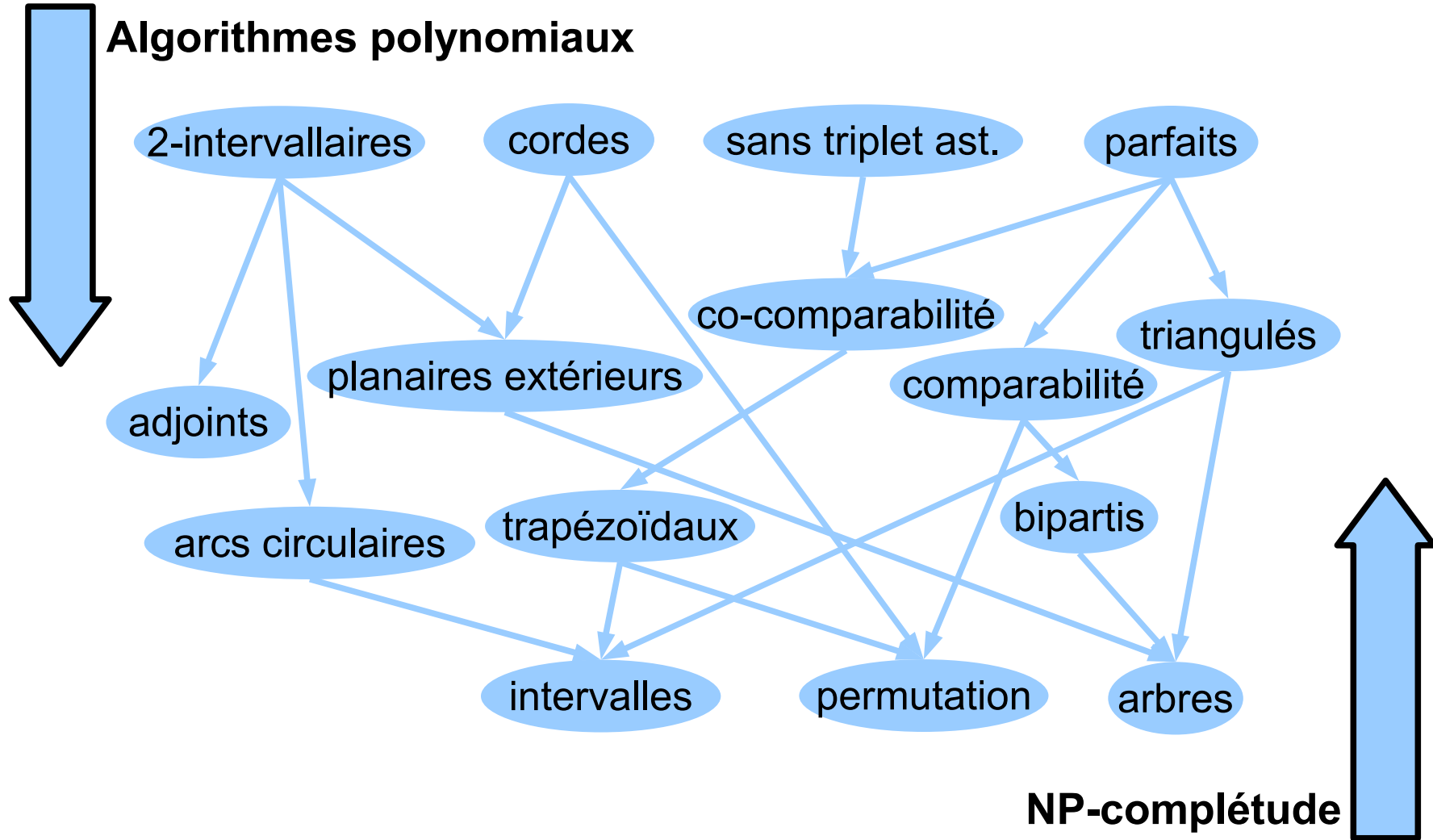


La **classe** de graphes d'intervalles **est incluse** dans celle des graphes trapézoïdaux.

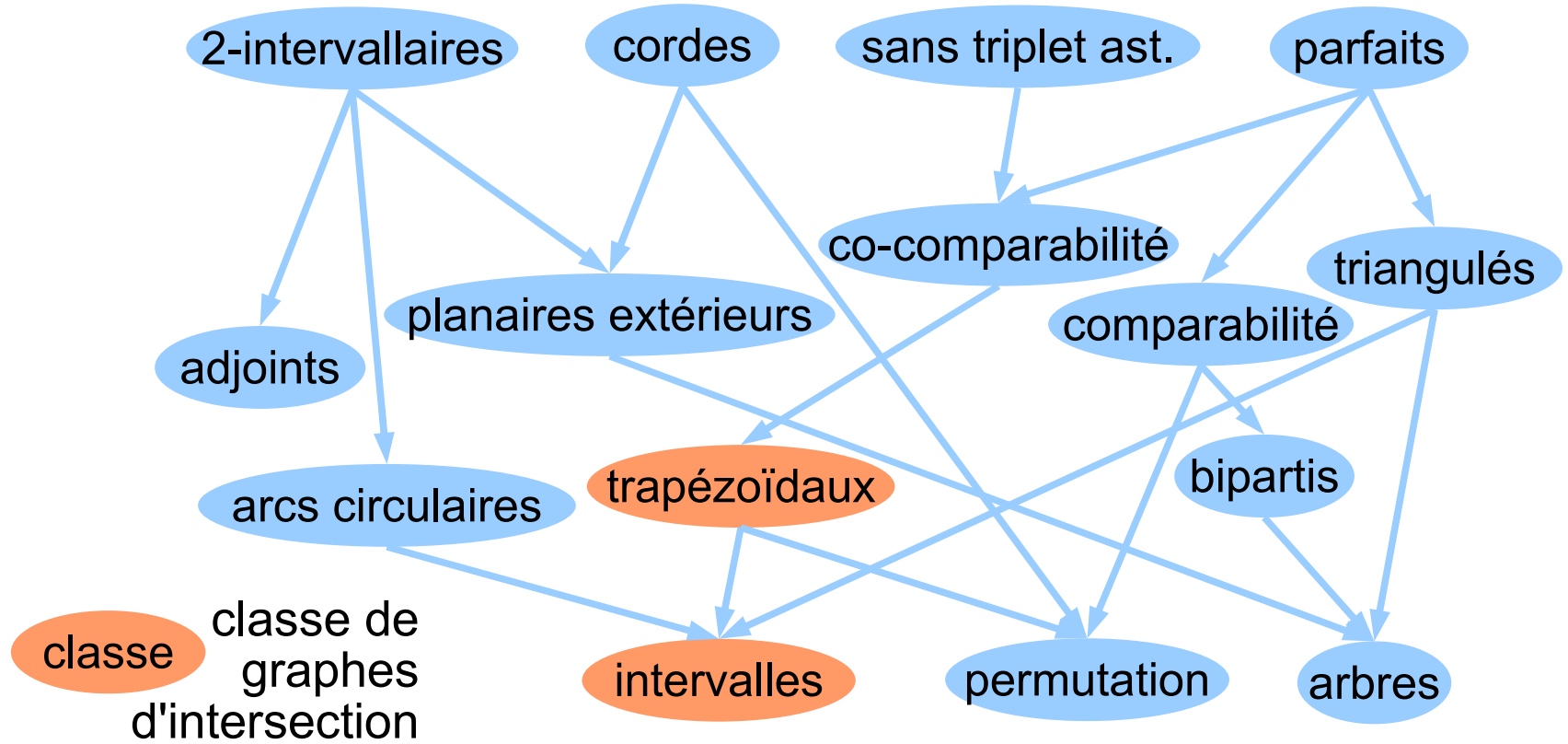
# Graphe d'inclusion des classes de graphes



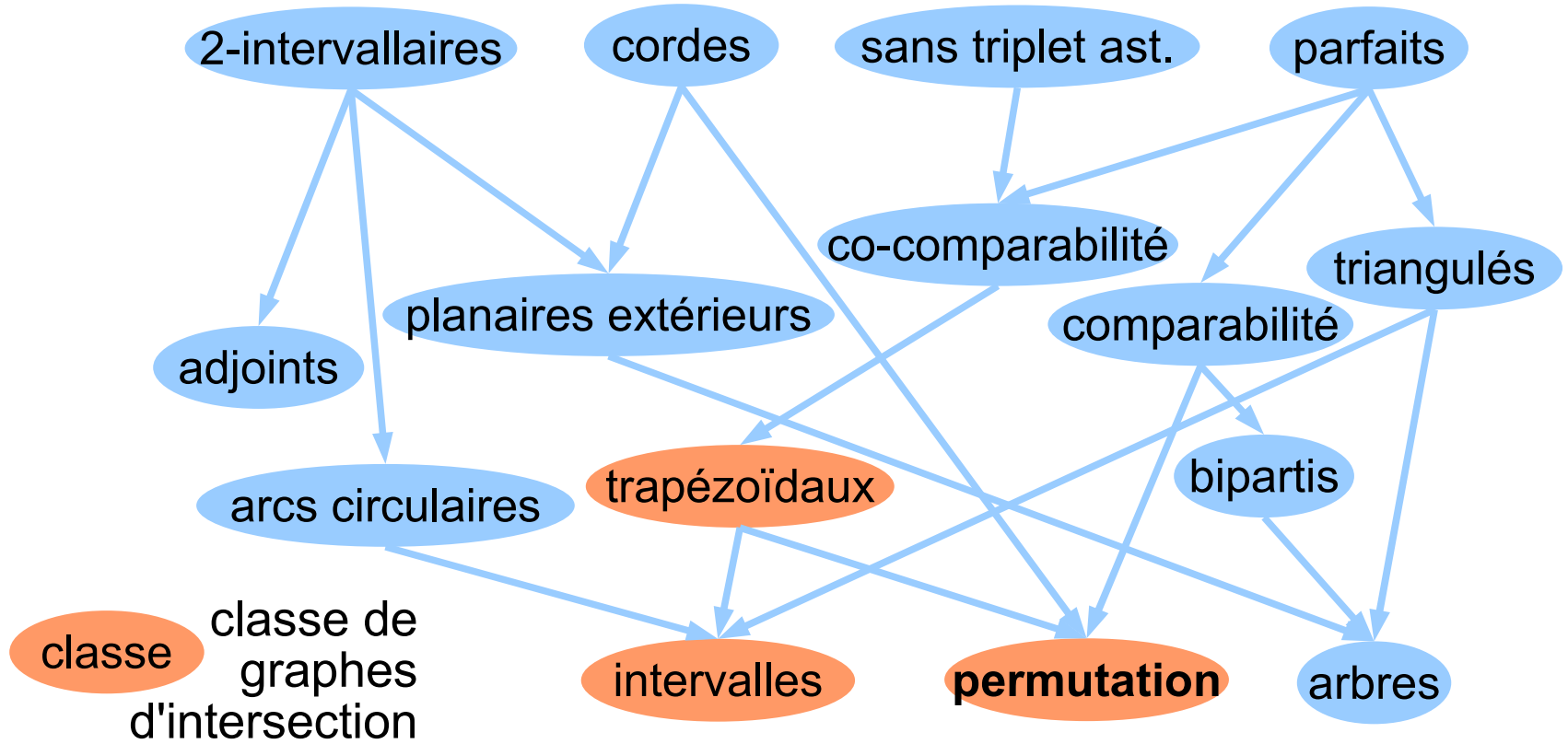
# Graphe d'inclusion des classes de graphes



# Graphe d'inclusion des classes de graphes

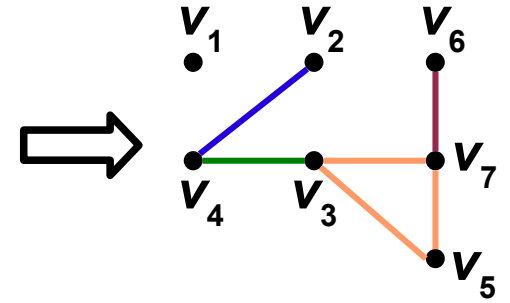
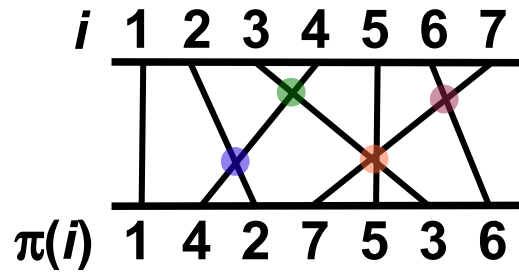


# Graphe d'inclusion des classes de graphes

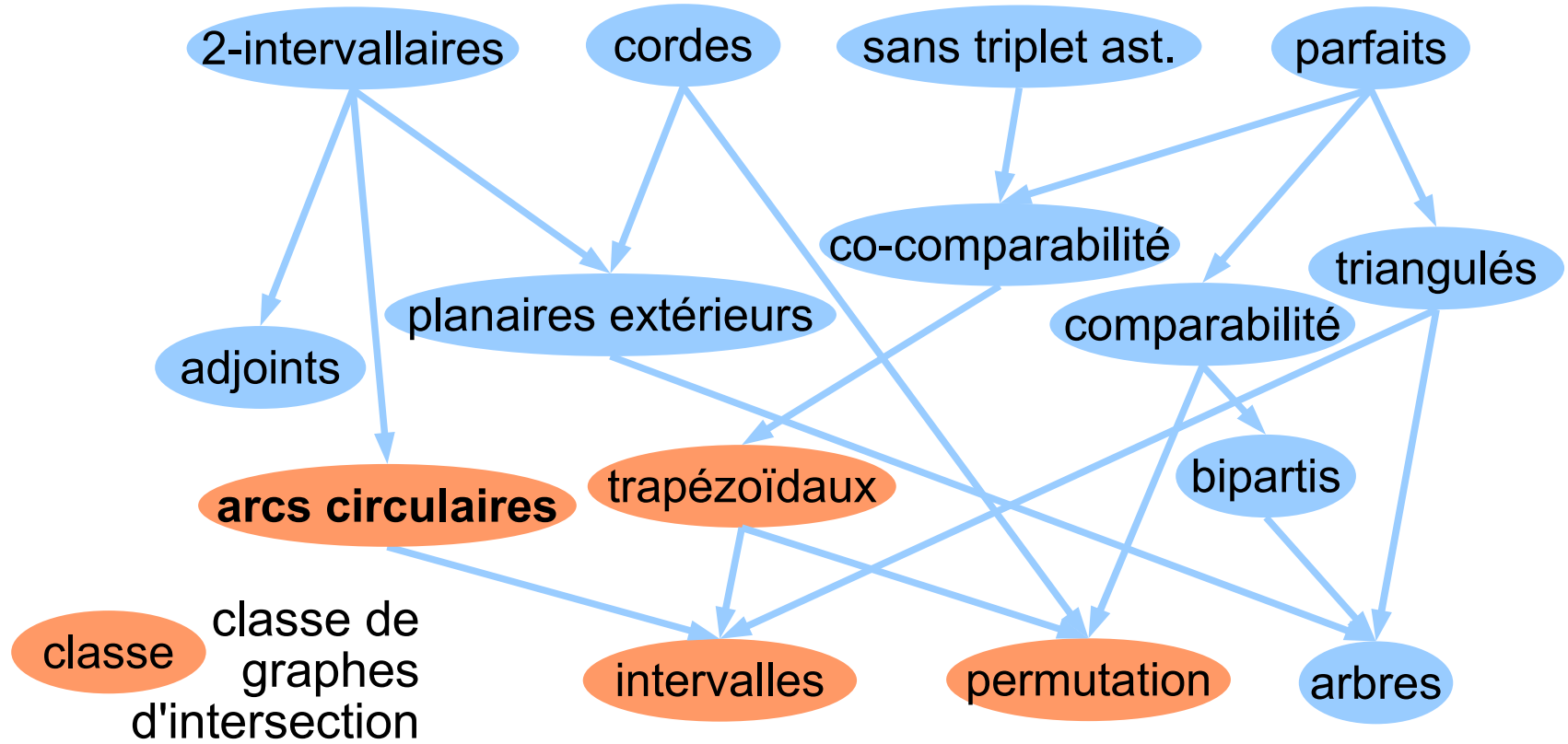


Graphe de **permutation** :  
 graphe d'intersection des  
 segments  $(k,k)$ .

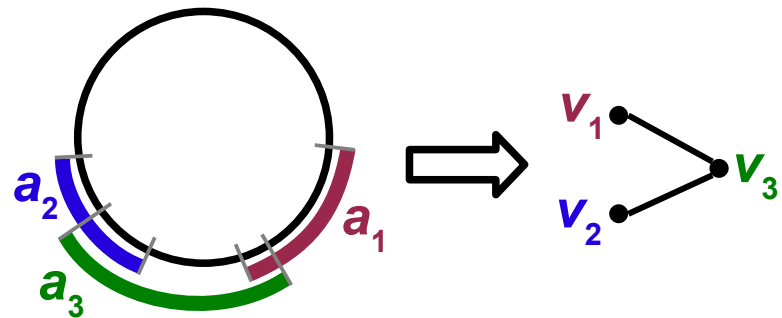
ligne des  $i$     ligne des  $\pi(i)$



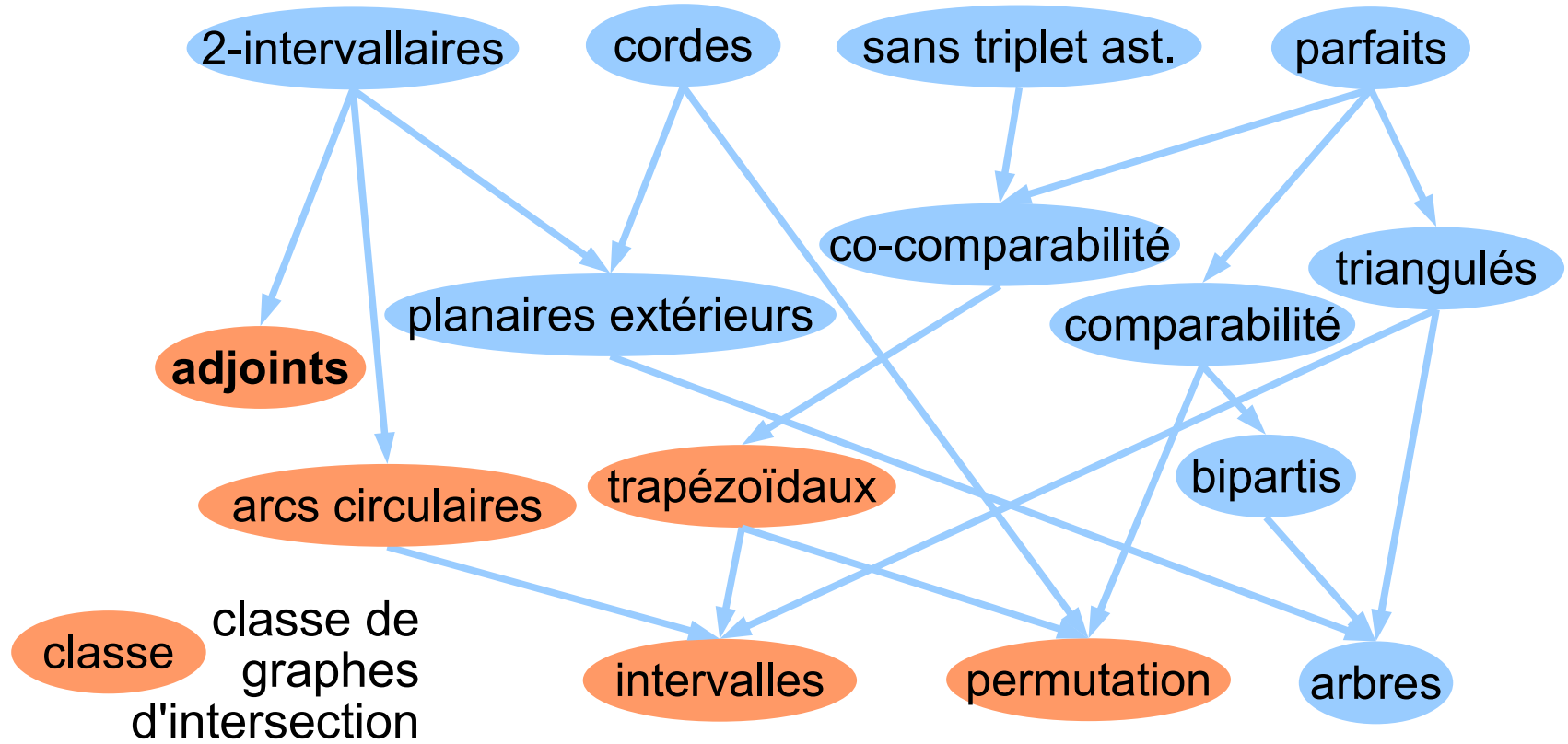
# Graphe d'inclusion des classes de graphes



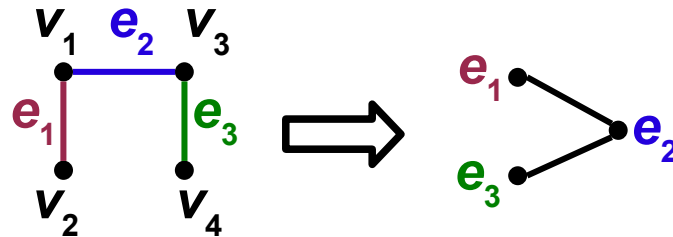
Graphe d'**arcs circulaires** :  
graphe d'intersection d'**arcs**  
d'un **cercle**.



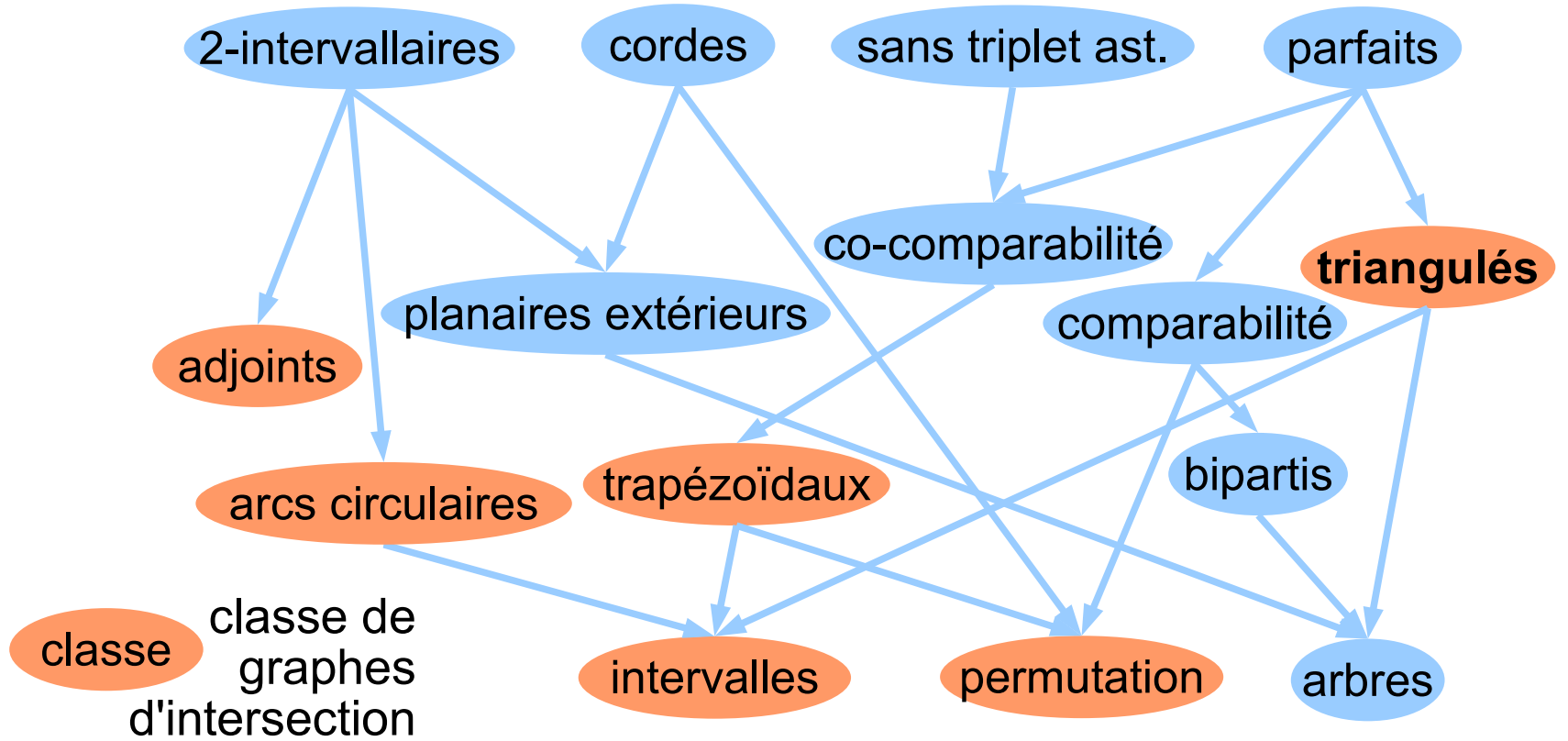
# Graphe d'inclusion des classes de graphes



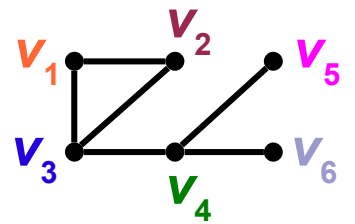
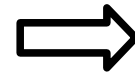
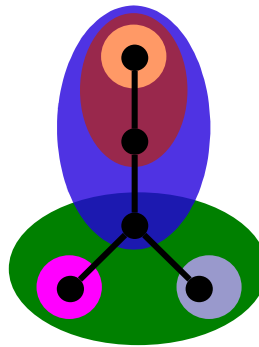
Graphe adjoint (*line graph*) :  
 graphe d'intersection des  
 arêtes d'un graphe.



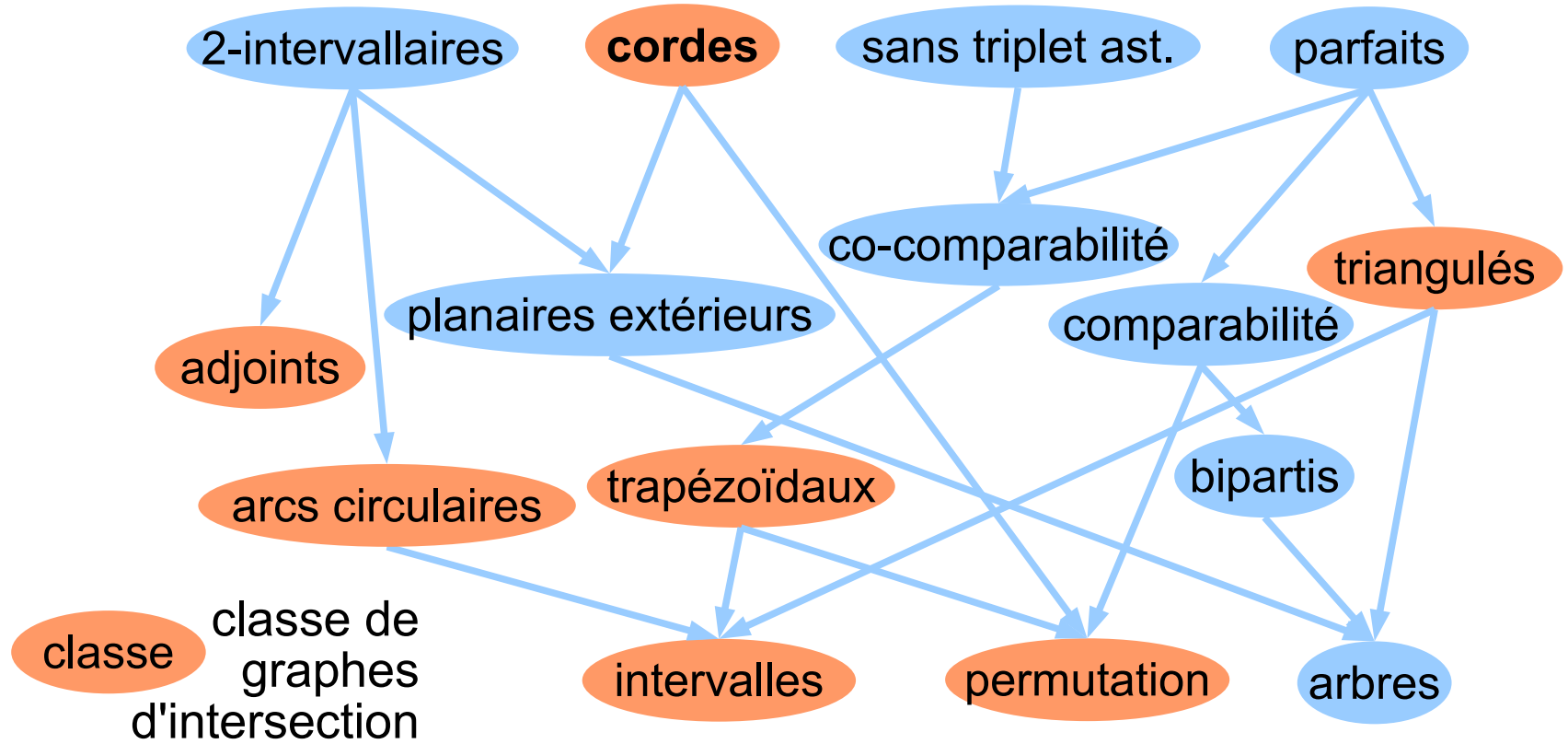
# Graphe d'inclusion des classes de graphes



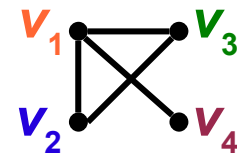
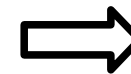
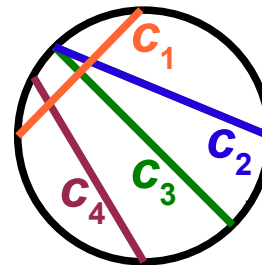
Graphe **triangulé (chordal)** :  
 graphe d'intersection  
 d'une famille de  
**sous-arbres d'un arbre.**



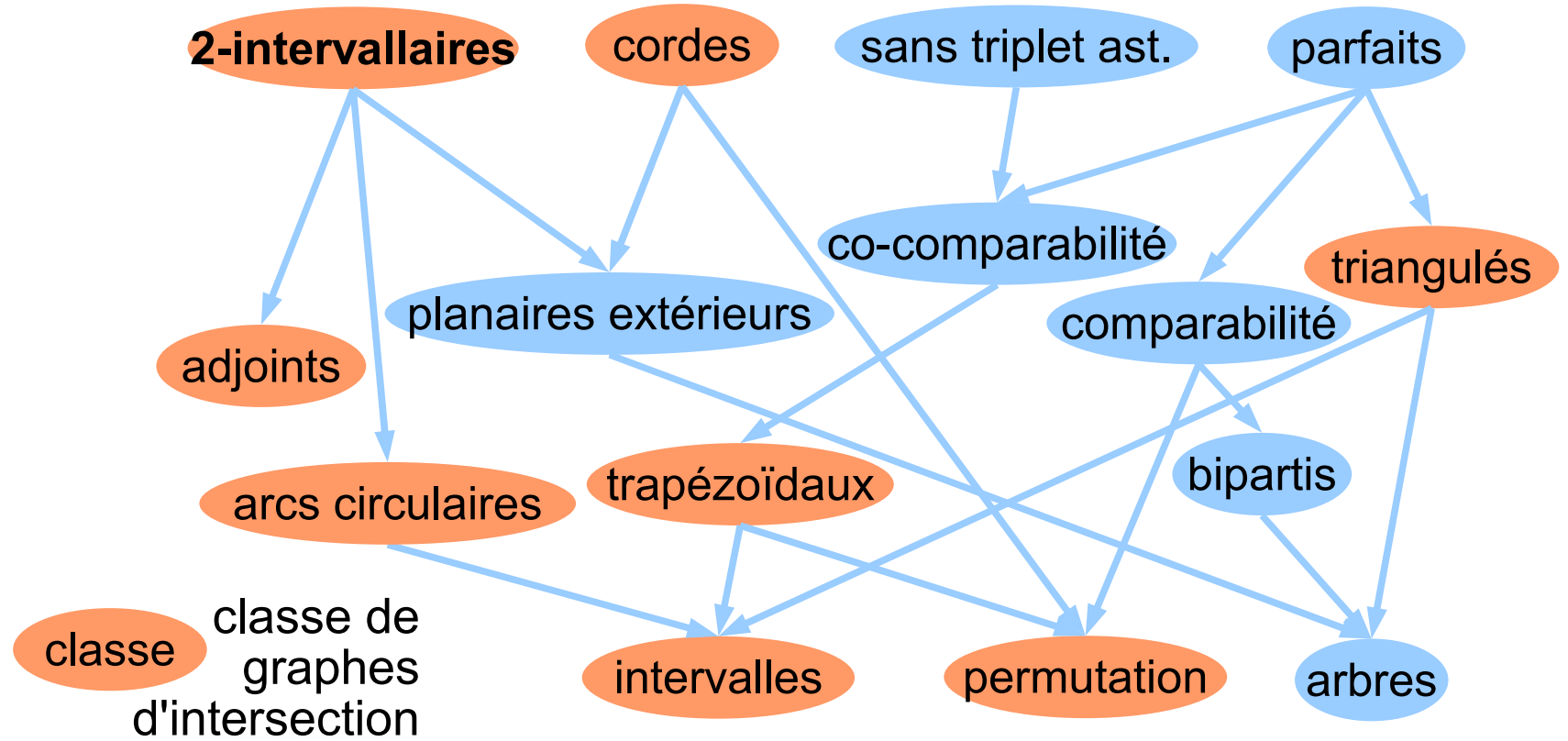
# Graphe d'inclusion des classes de graphes



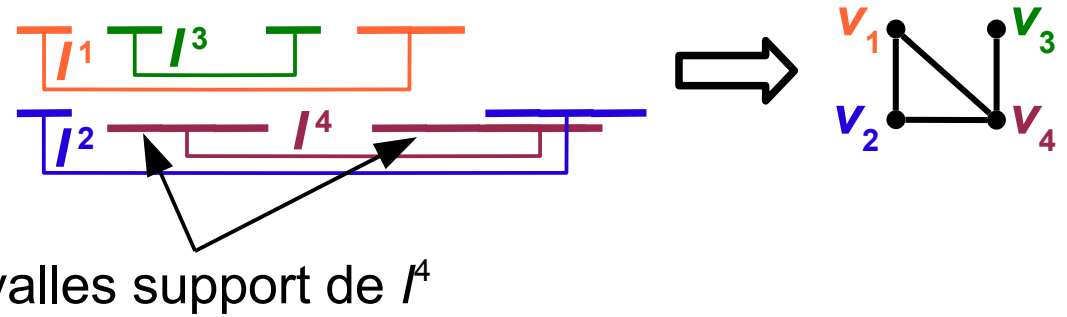
Graphe de cordes (*circle*) :  
graphe d'intersection des  
cordes d'un cercle.



# Graphe d'inclusion des classes de graphes



The star of the show,  
 graphe **2-intervallaire** :  
 graphe d'intersection  
 d'unions de deux intervalles.



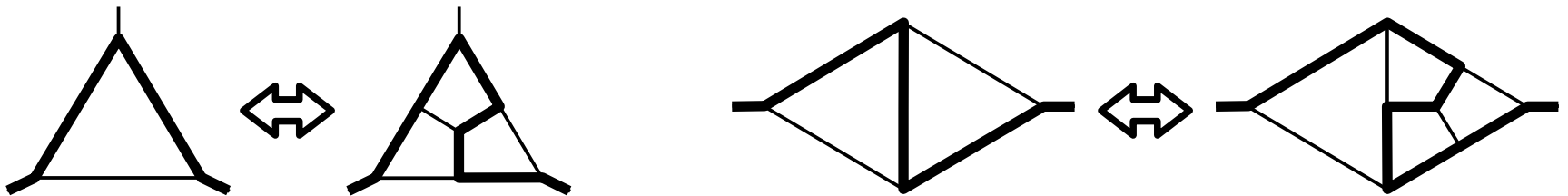
# Reconnaissance des graphes 2-intervallaires

Déterminer, pour un graphe  $G$  quelconque, s'il est 2-intervallaire, est **NP-complet** [West, Shmoys, 1984]

Idée de la preuve :

Par réduction du problème de **Cycle Hamiltonien sur les graphes 3-réguliers**, qui est **NP-complet** [Garey, Johnson, Tarjan, 1976].

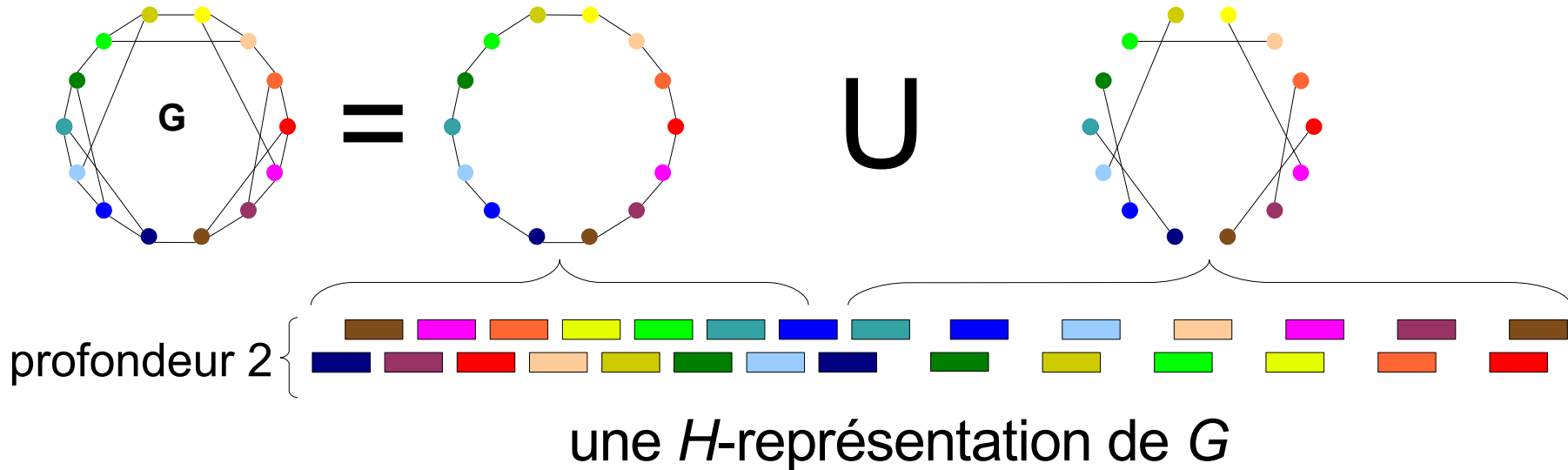
Première étape : réduction à **Cycle Hamiltonien sur les graphes 3-réguliers sans triangle**.



# Reconnaissance des graphes 2-intervallaires

Deuxième étape : pour tout **graphe  $G$  3-régulier sans triangle**, construction en temps polynomial un graphe  $G'$  qui est **2-intervallaire** ssi  $G$  admet un **cycle hamiltonien**.

L'idée : si  $G$  a un cycle hamiltonien, ajouter des gadgets sur  $G$  pour obtenir  $G'$  et **forcer** que toute réalisation 2-intervallaire de  $G'$  soit une  **$H$ -représentation** :



# Graphes 2-intervallaires et restrictions

**Support** d'un ensemble de 2-intervalles :  
ensemble des **intervalles support** des 2-intervalles.

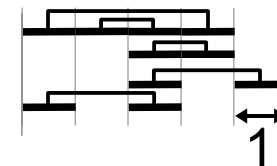
Support sans restriction : 

Support **équilibré** : 

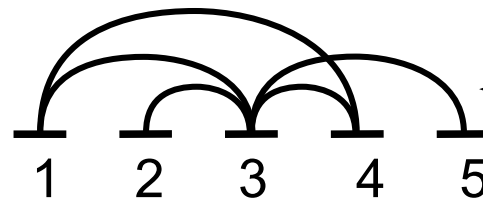
Support **unitaire** : 

Support **disjoint** : 

↳ graphes (1,1)-intervallaires :



↳ graphes adjoints

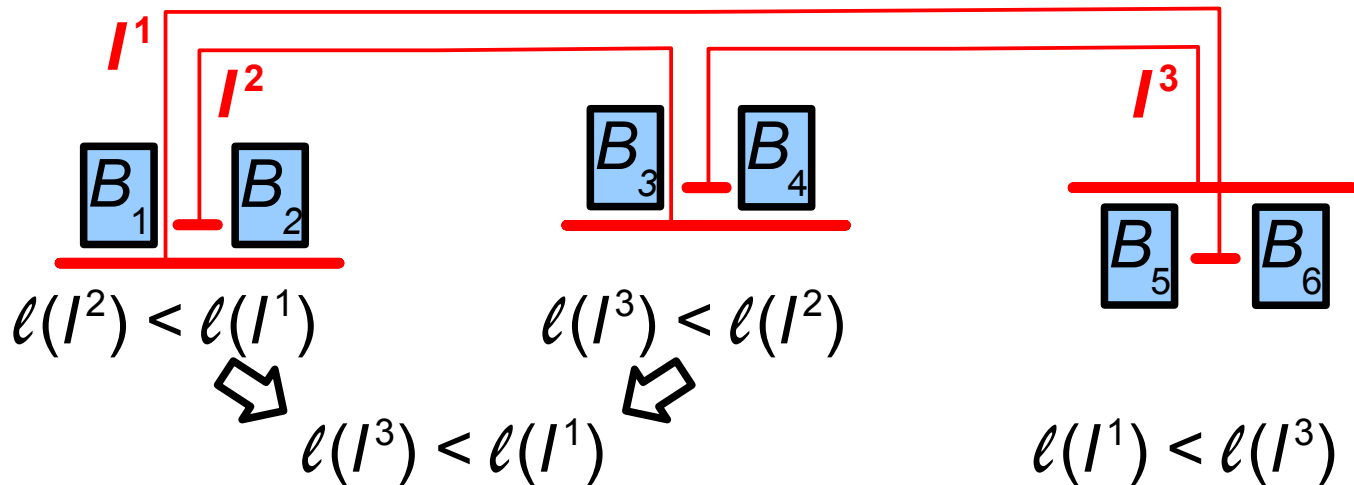


← graphe aux  
noeuds étiquetés  
sans noeud isolé

# Classe des 2-intervallaires équilibrés

La classe des **2-intervallaires équilibrés** est strictement incluse dans celle des **2-intervallaires**.

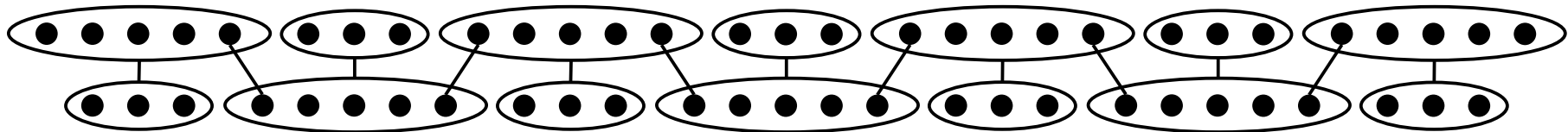
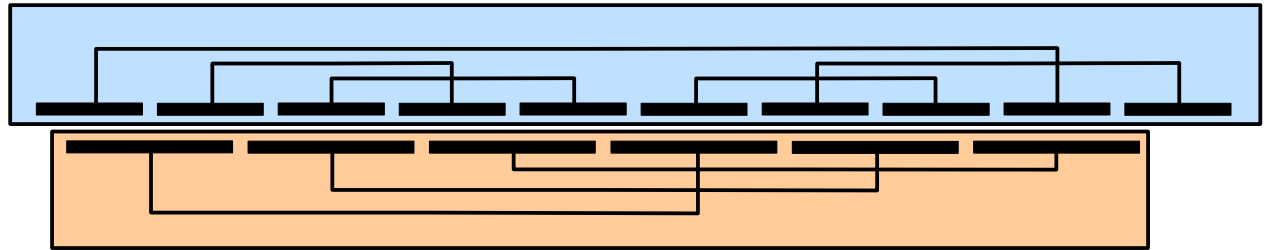
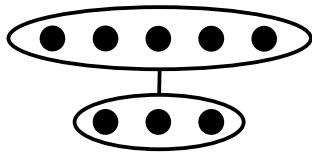
Motif de 2-intervalles non équilibrable :



On cherche à construire un graphe où on contraint la présence de **quelque chose de longueur non nulle** (un trou entre deux intervalles) à l'intérieur de chaque boîte  $B_i$ .

# Classe des 2-intervallaires équilibrés

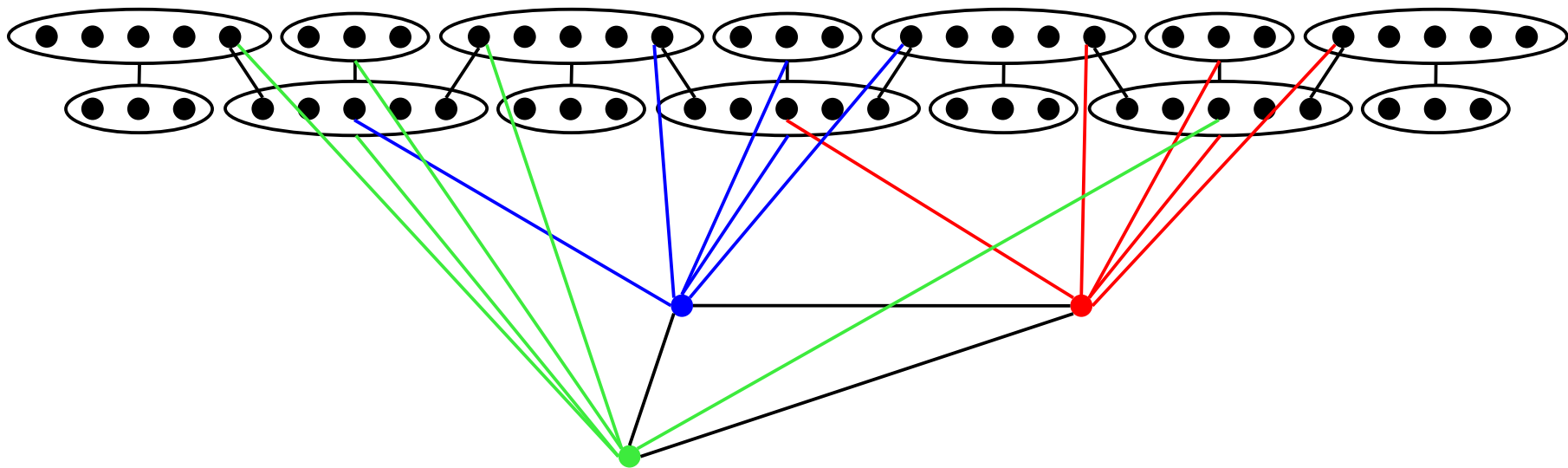
$K_{5,3}$  a une réalisation 2-intervallaire «en bloc» :



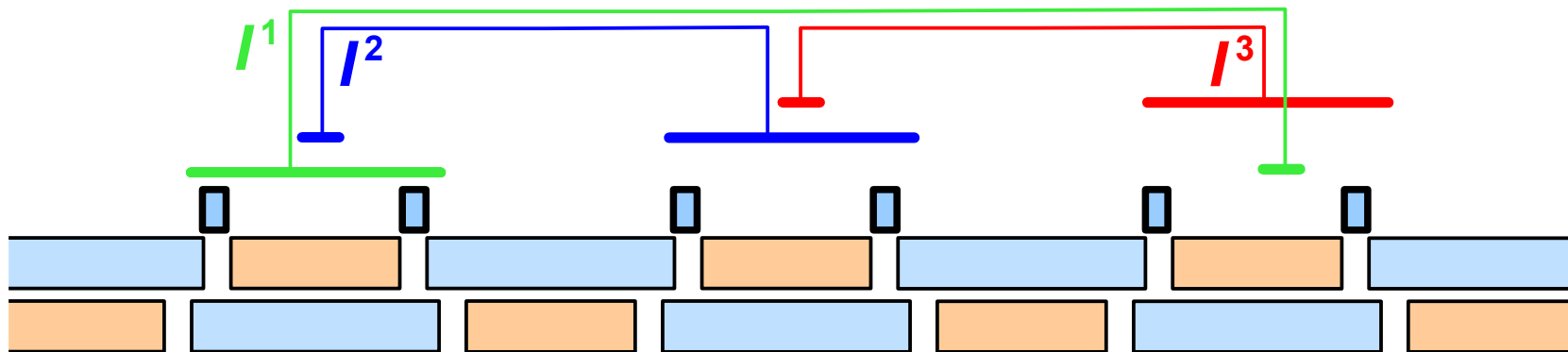
a une réalisation contrainte de la forme :



# Classe des 2-intervallaires équilibrés



a une réalisation contrainte de la forme :



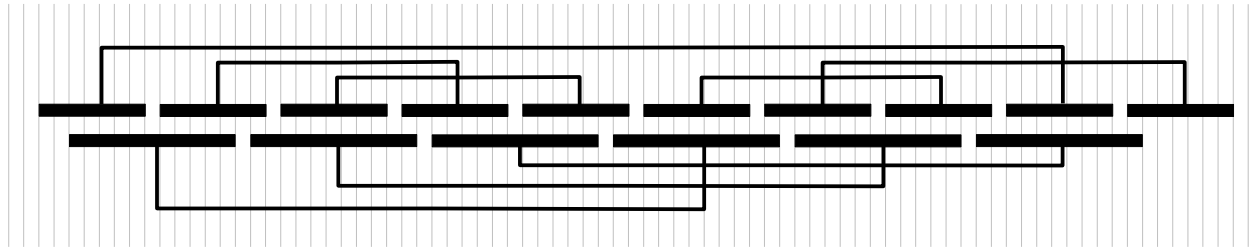
# Classe des 2-intervallaires équilibrés

Déterminer, pour un graphe  $G$  quelconque, s'il est 2-intervallaire équilibré, est **NP-complet**.

Idée de la preuve :

Adapter la preuve de West & Shmoys en utilisant des gadgets équilibrés (par simple dilatation le plus souvent).

En particulier  $K_{5,3}$  :



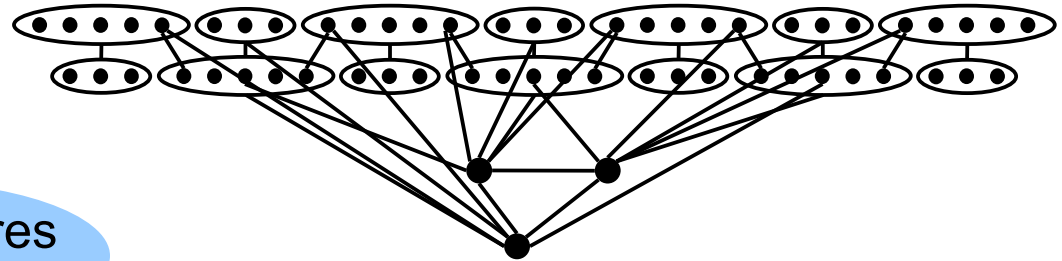
Mais la preuve ne s'adapte pas pour les **unitaires**.

# Hiérarchie des 2-intervallaires restreints

Reconnaissance :

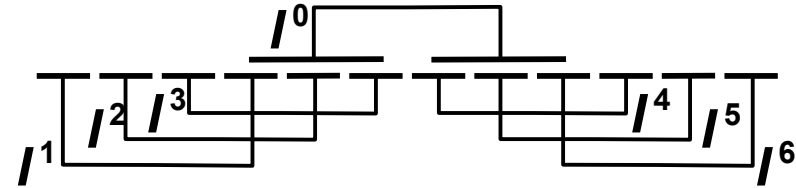
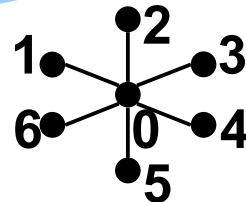
NP-complète

2-intervallaires

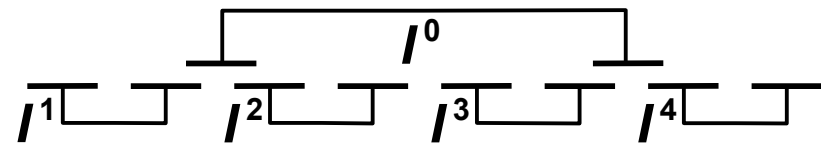
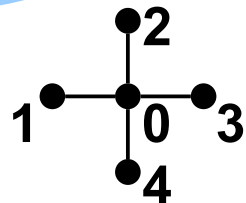


NP-complète

2-intervallaires équilibrés



2-intervallaires unitaires



Linéaire

(1,1)-intervallaires

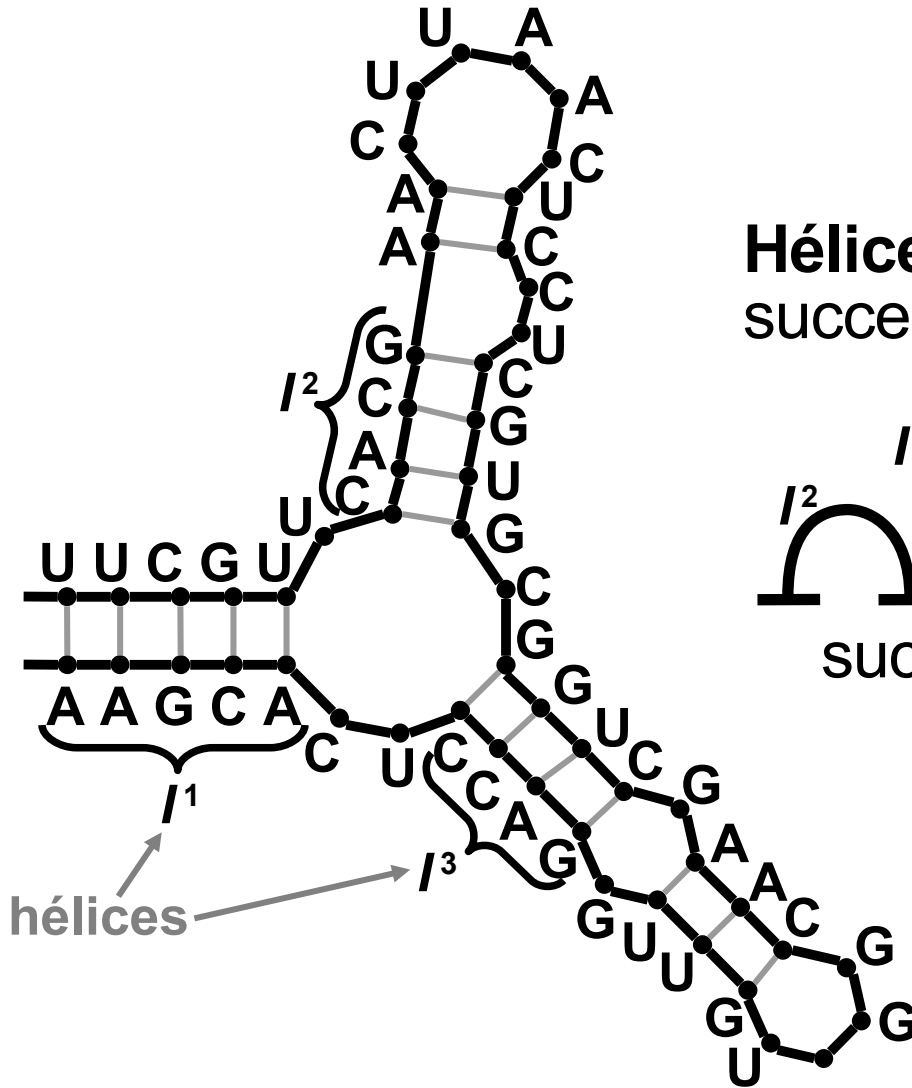
# Motivations

---

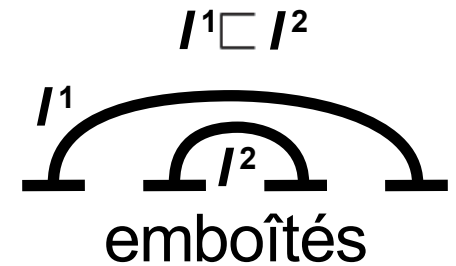
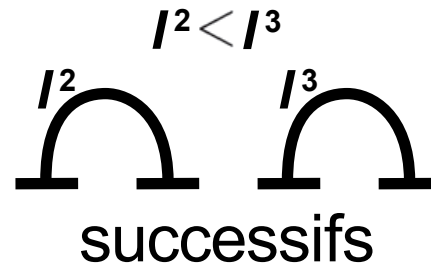
Un **2-intervalle** modélise :

- une tâche coupée en 2 dans un problème d'**ordonnement**
- deux portions similaires ou complémentaires inversées d'**ADN**
- deux portions complémentaires et inversées d'**ARN**
- deux extraits « mis en relation » dans une **partition musicale**

# Motivations : cas de l'ARN

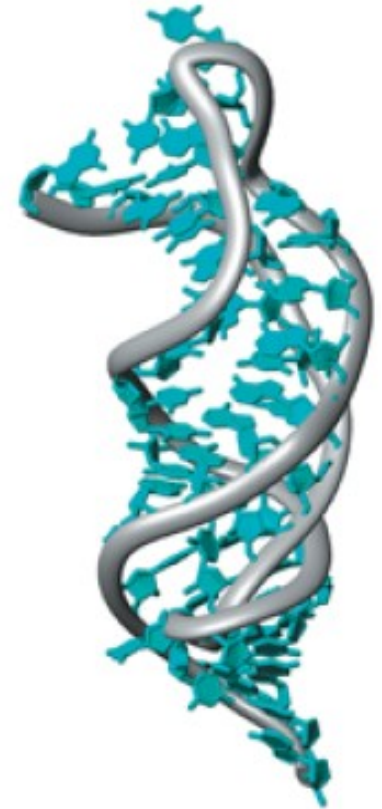
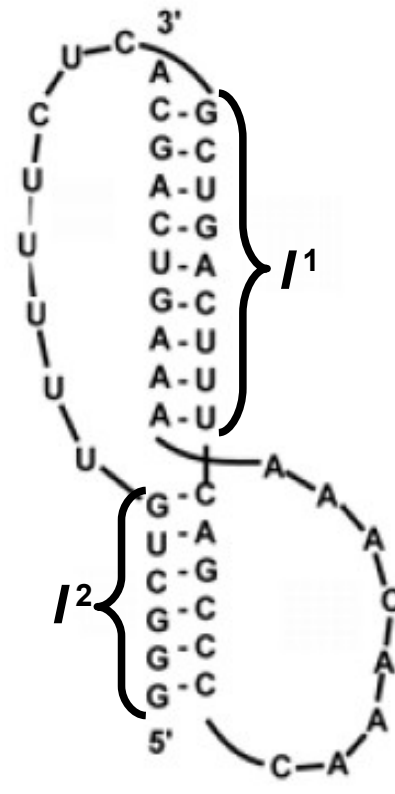
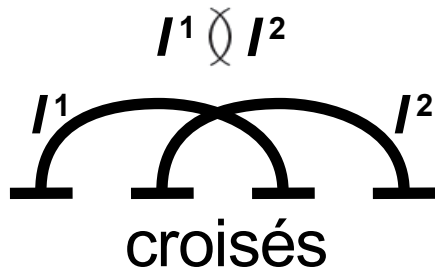


**Hélices** : appariements de portions successives ou emboîtées d'ARN.



# Motivations : cas de l'ARN

**Pseudo-noeud :**  
appariement de nucléotides  
entrelacés.

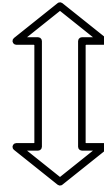


Extrémité 5' du composant  
ARN de la télomérase humaine

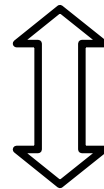
D'après D.W. Staple, S.E. Butcher, *Pseudoknots: RNA structures with Diverse Functions* (PloS Biology 2005 3:6 p.957)

# Vers la théorie des graphes : stable max

Trouver les **hélices** d'un ARN sans pseudo-noeud donné comme une suite de nucléotides.



Trouver le plus **grand sous-ensemble** de 2-intervalles **disjoints**, uniquement **successifs ou emboîtés**, dans un ensemble de 2-intervalles.



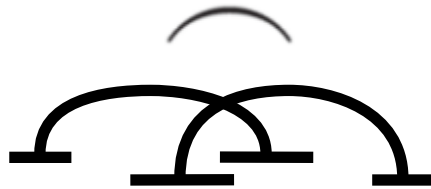
Trouver le **stable maximum** du graphe tel que :

- les **sommets** correspondent aux **2-intervalles**,
- une **arête** joint deux 2-intervalles qui **s'intersectent**,
- une **arête** joint deux 2-intervalles **croisés**.

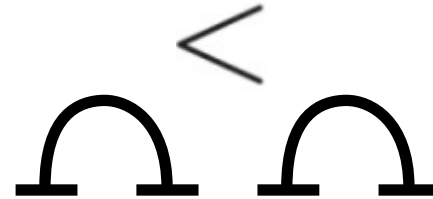
# Graphes 2-intervallaires et variantes

16 variantes de la classe des graphes de 2-intervalles :

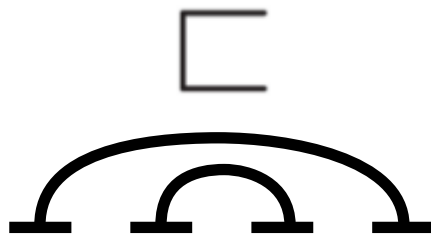
- les **sommets** correspondent aux **2-intervalles**
- une **arête** joint deux 2-intervalles qui sont :



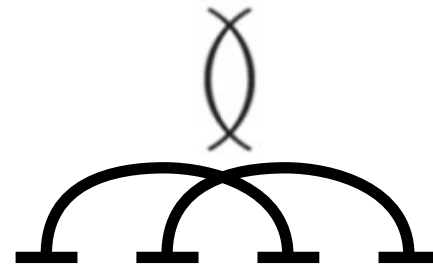
intersectants



successifs



emboîtés



croisés

↳ 8 classes à caractériser (et leur complémentaire)

# Variantes des graphes 2-intervallaires

Support :

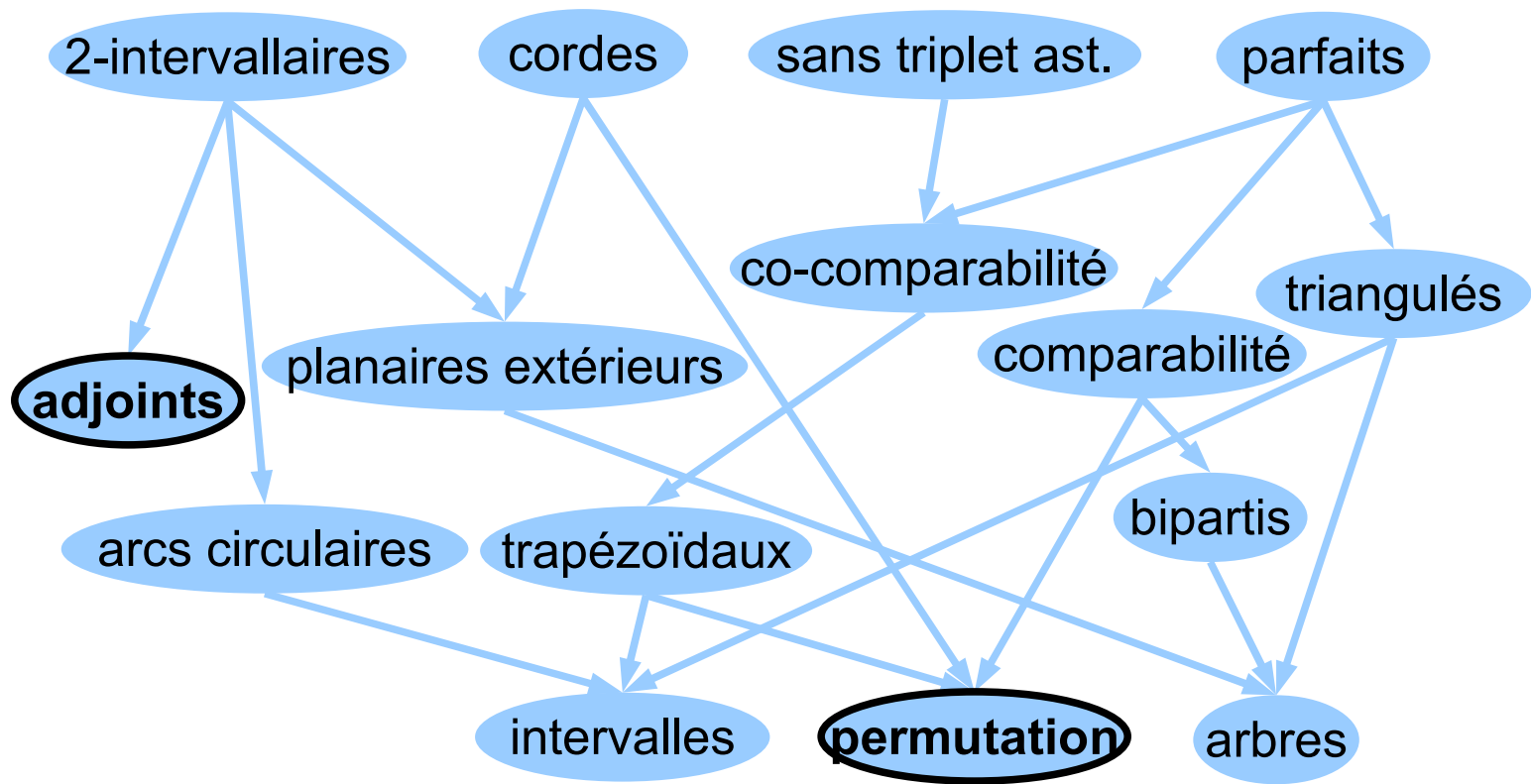
sans restriction

disjoint

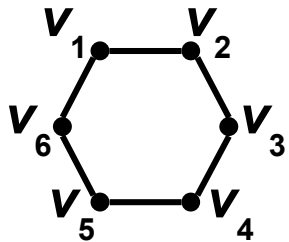
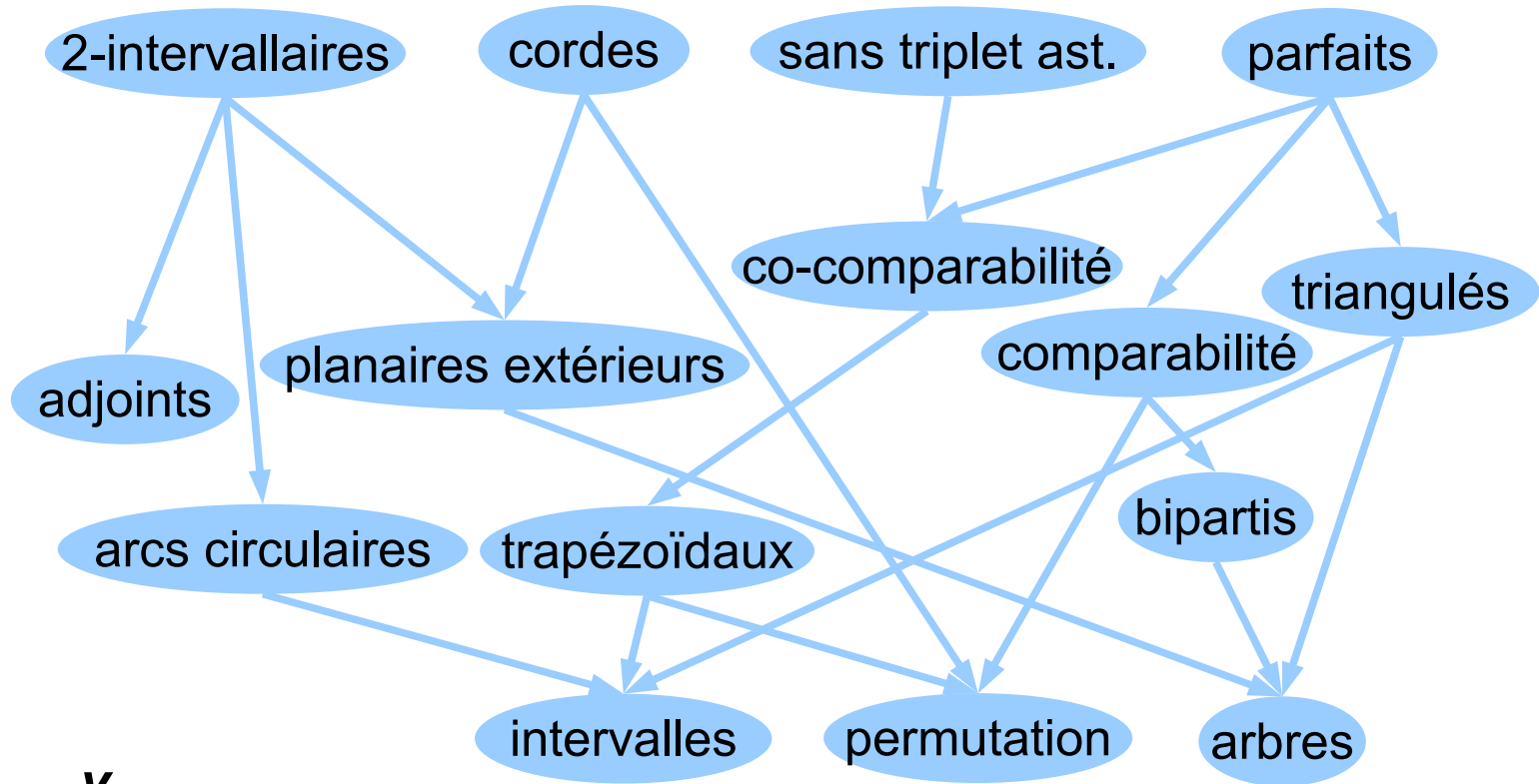
|                                       |  |   |
|---------------------------------------|--|---|
| $\{\frown, \sqsubset, <, \emptyset\}$ | clique   | clique                                    |
| $\{\frown\}$                          | 2-intervallaires                                 | adjoints                                  |
| $\{\frown, \sqsubset\}$               | Classes inconnues,<br>stable max NP-complet      | Classe inconnue,<br>stable max inconnu    |
| $\{\frown, <\}$                       |  | Classe inconnue, stable<br>max polynomial |
| $\{\frown, \emptyset\}$               | Inclusions utiles dans<br>des classes de graphes | cordes                                    |
| $\{\frown, \sqsubset, <\}$            |  | <u>cordes</u>                             |
| $\{\frown, \sqsubset, \emptyset\}$    | intervalles                                      | intervalles                               |
| $\{\frown, <, \emptyset\}$            | trapézoïdaux                                     | permutation                               |

# Classe des $\{\curvearrowright, \square\}$ -(1,1)-intervallaires

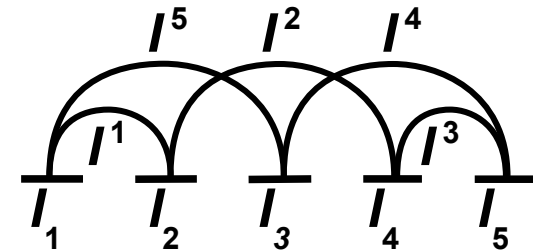
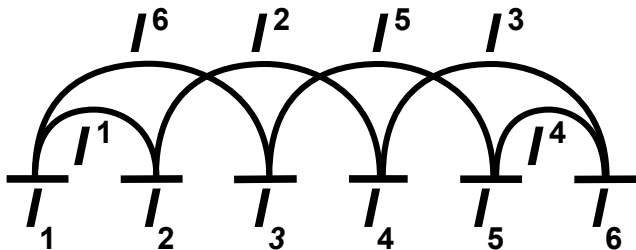
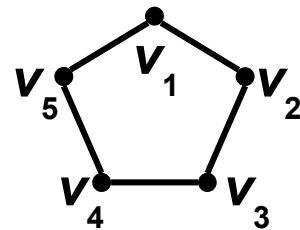
Un graphe  $\{\curvearrowright, \square\}$ -(1,1)-intervallaire est l'union  
d'un **graphe adjoint** et d'un **graphe de permutation**.



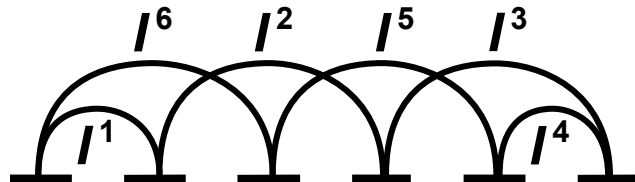
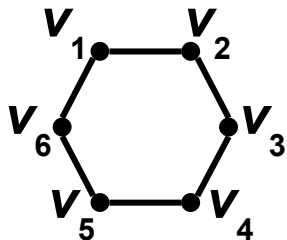
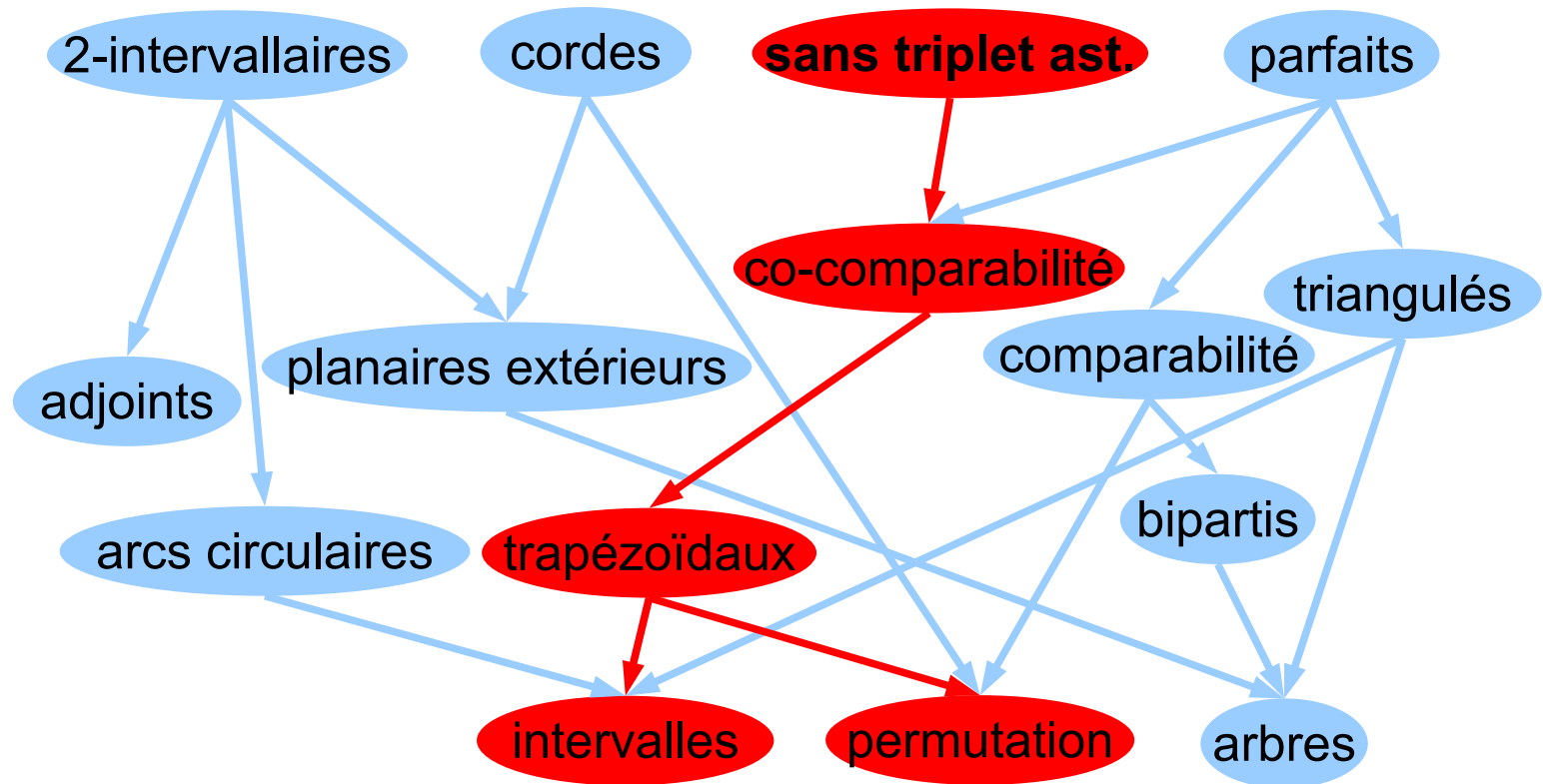
# Classe des $\{\cap, \sqsubset\}$ -(1,1)-intervallaires



Les **cycles** sont des graphes  $\{\cap, \sqsubset\}$ -(1,1)-intervallaires.



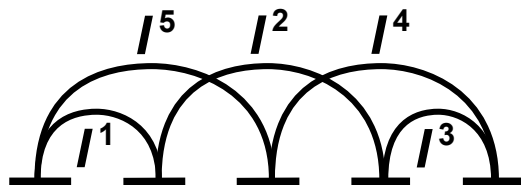
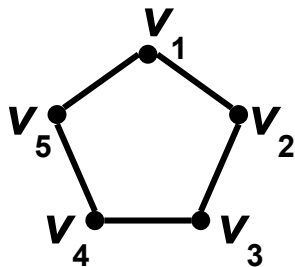
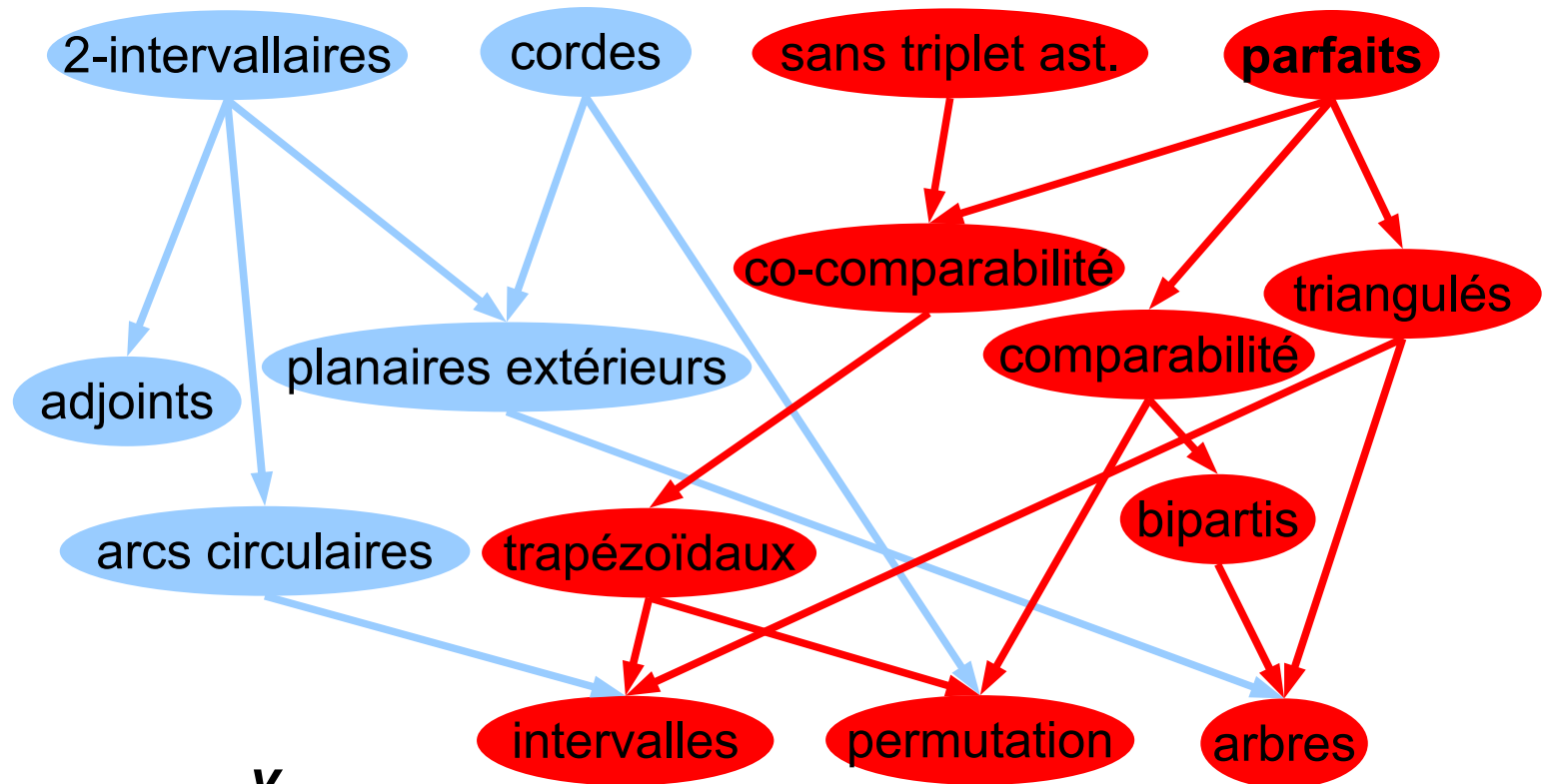
# Classe des $\{\cap, \sqsubset\}$ -(1,1)-intervallaires



**classe** classe de graphes ne contenant pas celle des  $\{\cap, \sqsubset\}$ -(1,1)-intervallaires

Les **cycles** sont des graphes  $\{\cap, \sqsubset\}$ -(1,1)-intervallaires.

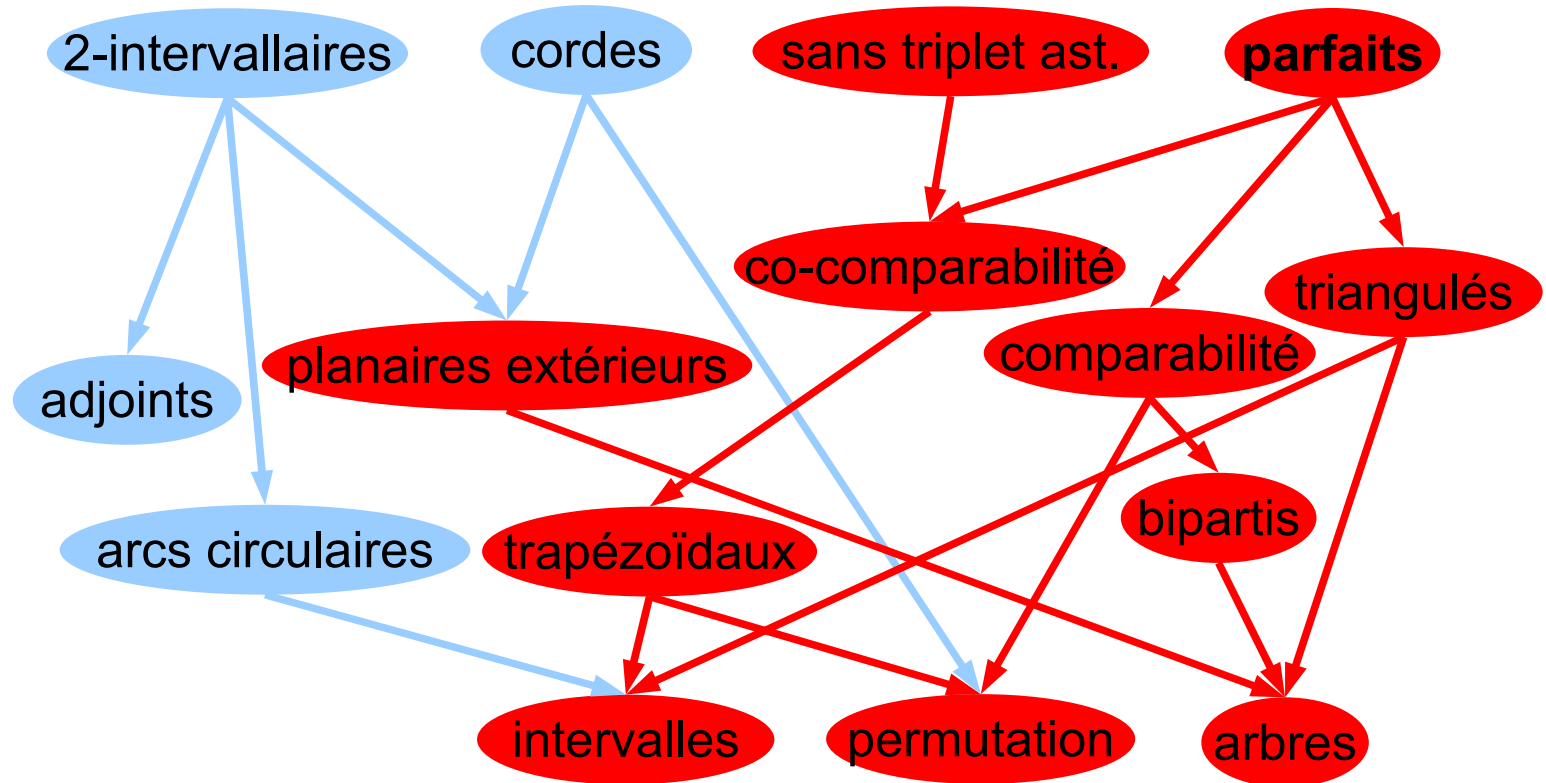
# Classe des $\{\cap, \sqsubset\}$ -(1,1)-intervallaires



**classe** classe de graphes ne contenant pas celle des  $\{\cap, \sqsubset\}$ -(1,1)-intervallaires

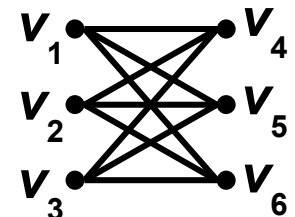
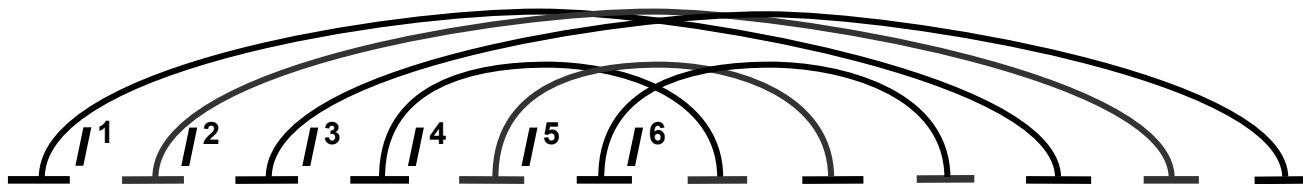
Les **cycles** sont des graphes  $\{\cap, \sqsubset\}$ -(1,1)-intervallaires.

# Classe des $\{\cap, \sqsubset\}$ -(1,1)-intervallaires

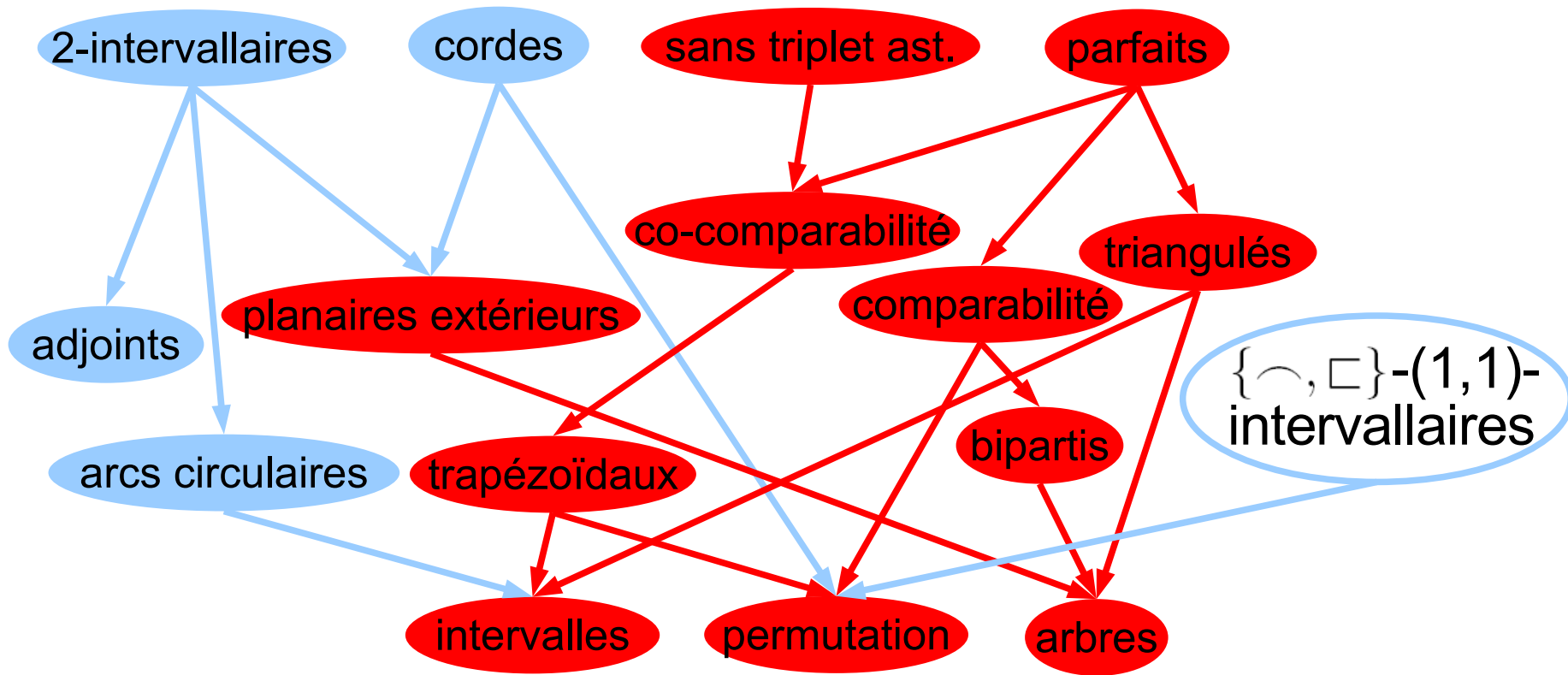


Les **bipartis complets** sont des graphes  $\{\cap, \sqsubset\}$ -(1,1)-intervallaires.

**classe** classe de graphes ne contenant pas celle des  $\{\cap, \sqsubset\}$ -(1,1)-intervallaires



# Classe des $\{\curvearrowright, \sqsubset\}$ -(1,1)-intervallaires



**classe** classe de graphes ne contenant pas celle des  $\{\curvearrowright, \sqsubset\}$ -(1,1)-intervallaires

Les **graphes de permutation** sont des graphes  $\{\curvearrowright, \sqsubset\}$ -(1,1)-intervallaires.

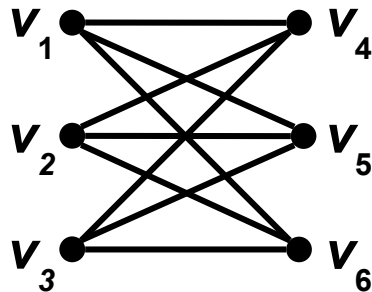
# Classe des $\{\frown, \square\}$ -(1,1)-intervallaires

## Graphes interdits ?

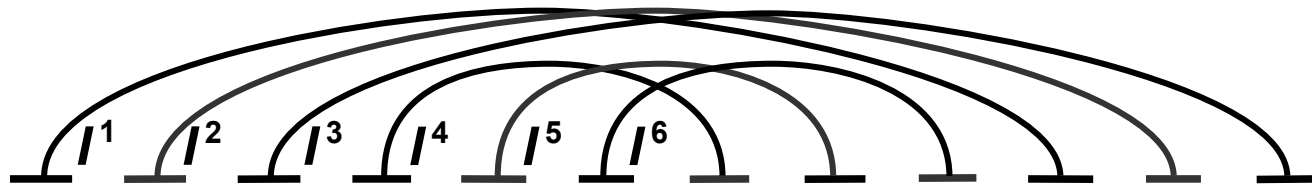
Les **cographe**s sont des graphes de permutation donc des  $\{\frown, \square\}$ -(1,1)-intervallaires, donc les graphes interdits contiennent un  $P_4$ .

On vérifie que tous les graphes à 5 noeuds ou moins sont  $\{\frown, \square\}$ -(1,1)-intervallaires.

On exhibe un sous-graphe interdit à 9 sommets :



a 40 réalisations.



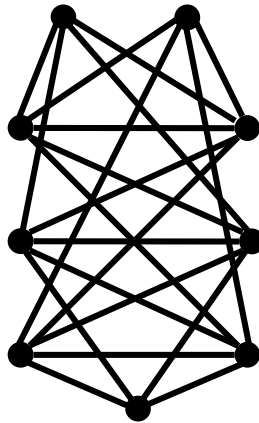
# Classe des $\{\frown, \sqsubset\}$ -(1,1)-intervallaires

## Graphes interdits ?

Les **cographe**s sont des graphes de permutation donc des  $\{\frown, \sqsubset\}$ -(1,1)-intervallaires, donc les graphes interdits contiennent un  $P_4$ .

On vérifie que tous les graphes à 5 noeuds ou moins sont  $\{\frown, \sqsubset\}$ -(1,1)-intervallaires.

On exhibe un sous-graphe interdit à 9 sommets :



n'a aucune réalisation.

# Conclusion

---

- Des problèmes de complexité restent ouverts :
  - autre formulation pour le problème du stable max, sur le diagramme de Hasse de la partie graphe de permutation du graphe  $\{\curvearrowright, \sqsubset\}$ - $(1,1)$ -intervallaire.
  - complexité de la reconnaissance des  $(k,k)$ -intervallaires ( $k > 1$ ) ?
  - clique maximum sur les 2-intervallaires ?