Journées Graphes et Algorithmes 2006 - Orléans

Graphes 2-intervallaires et classes apparentées

Philippe Gambette

LIAFA

ENS CACHAN

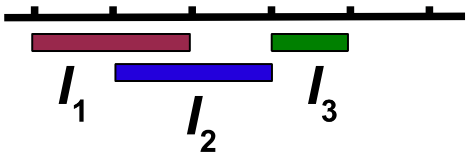
université PARIS DIDEROT PARIS 7

Plan

- Quelques classes de graphes d'intersection
- Graphes 2-intervallaires équilibrés
- Quelques motivations pour les 2-intervallaires
- Problème du stable maximum
- Variantes de la classe des graphes 2-intervallaires
- Graphes $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires

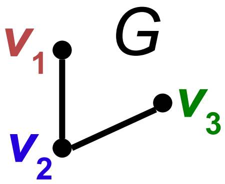
Les graphes d'intervalles

$\mathcal{I} = \{[0,2],[1,3],[3,4]\}$



un **sommet** ⇔ un **intervalle**

une **arête** entre deux sommets ⇔ les deux intervalles ont une **intersection non vide**



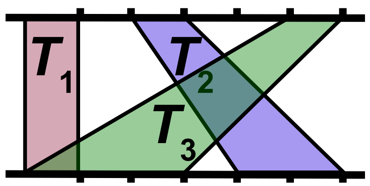
$\mathcal{I}$ est une **réalisation** du **graphe d'intersection** *G*.

G est un **graphe d'intervalles.**

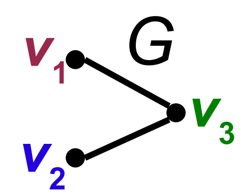
Les graphes trapézoïdaux

$$\mathcal{T} = \{([0,1],[0,1]),\ ([2,3],[4,6]),\ ([5,6],[0,3])\}$$

un **sommet** ⇔ un **trapèze** entre deux lignes horizontales



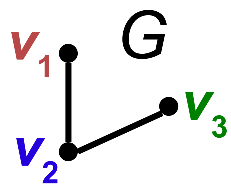
une **arête** entre deux sommets ⇔ les deux trapèzes ont une **intersection non vide**



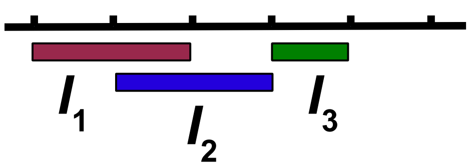
G est un ***graphe trapézoïdal.***

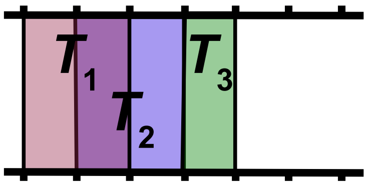
Classes de graphes

Tout graphe d'intervalles est un graphe trapézoïdal.



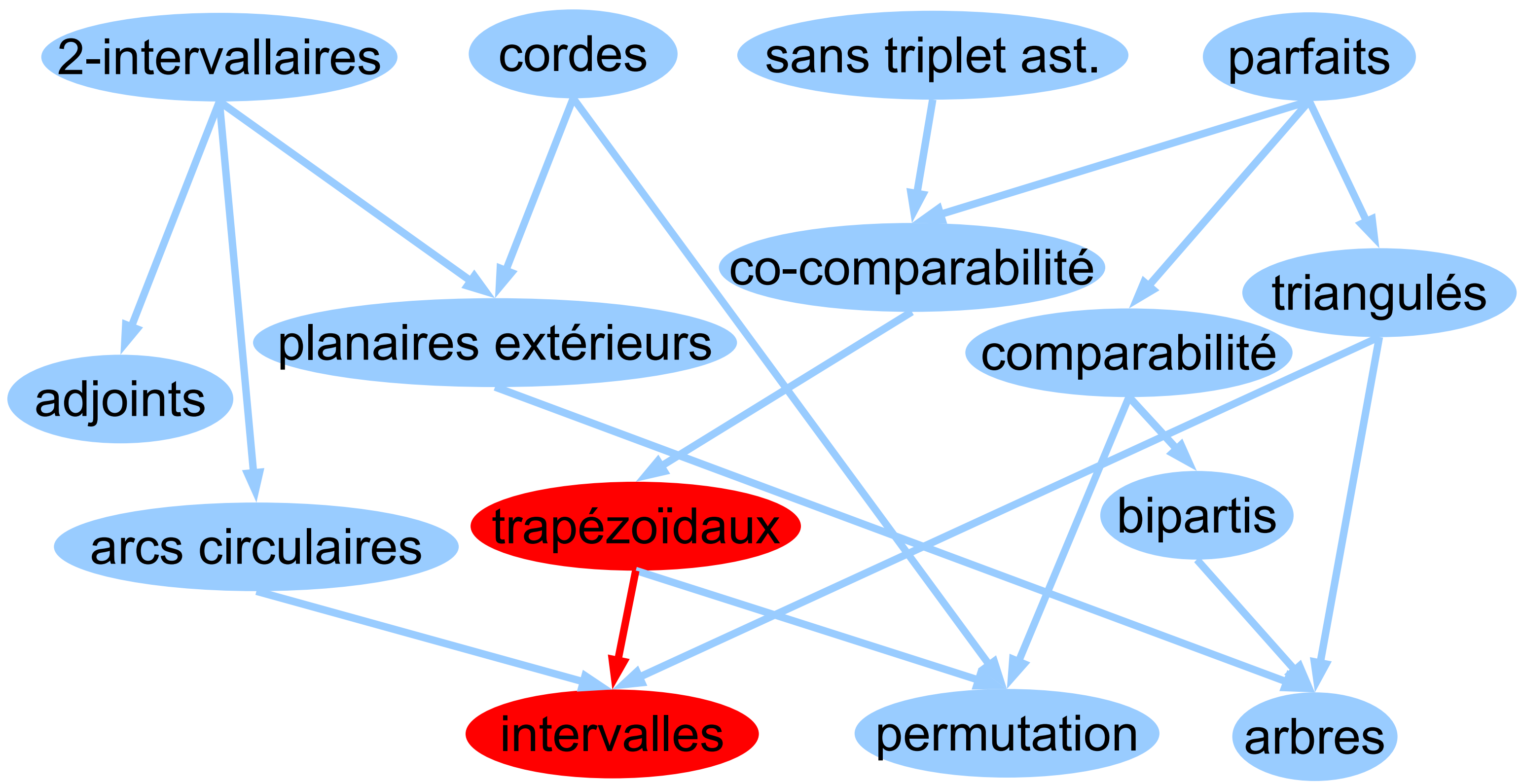
$\mathcal{I} = \{[0,2],[1,3],[3,4]\} \Longrightarrow \mathcal{T} = \{([0,2],[0,2]),([1,3],[1,3]),([3,4],[3,4])\}$



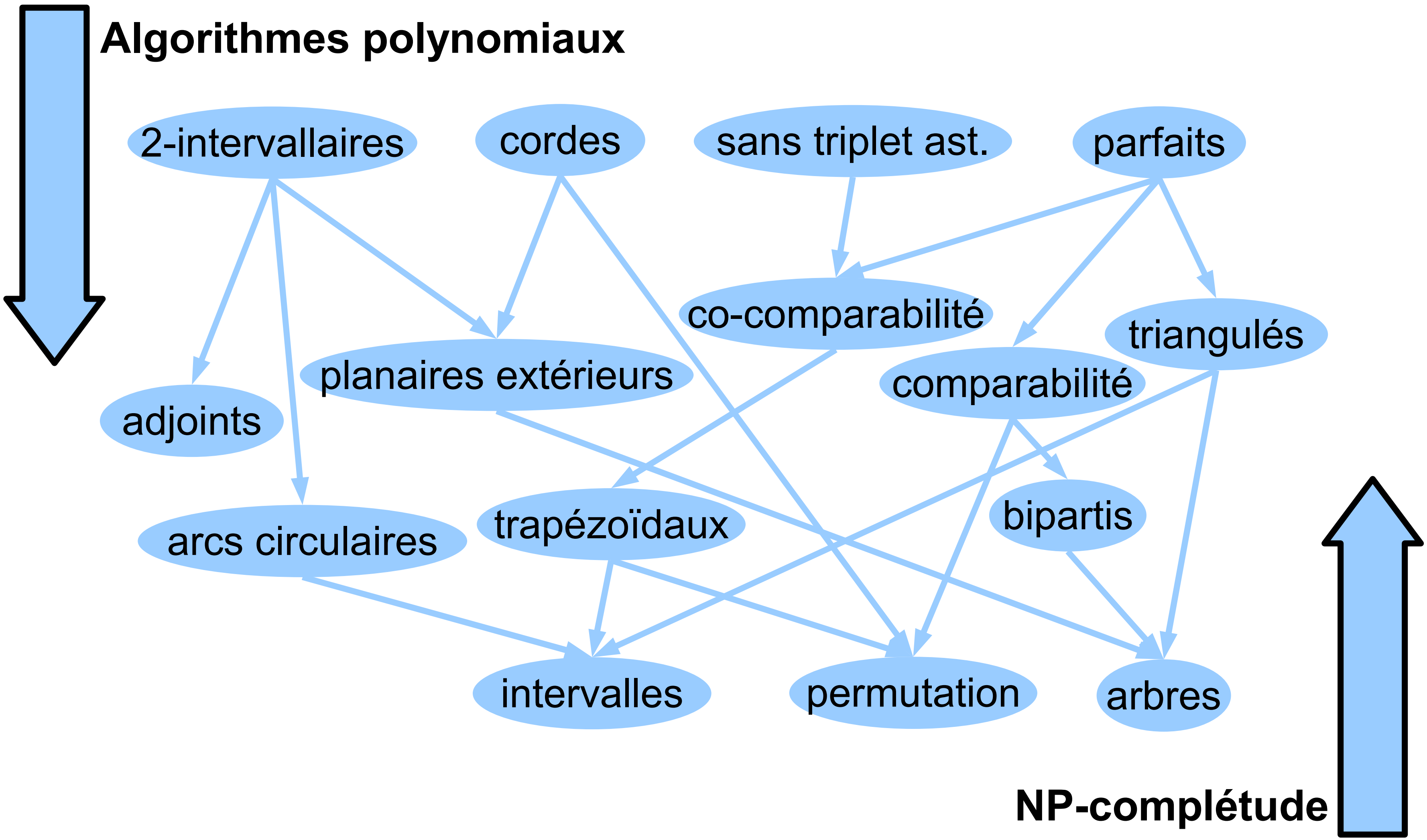


La **classe** de graphes d'intervalles **est incluse** dans celle des graphes trapézoïdaux.

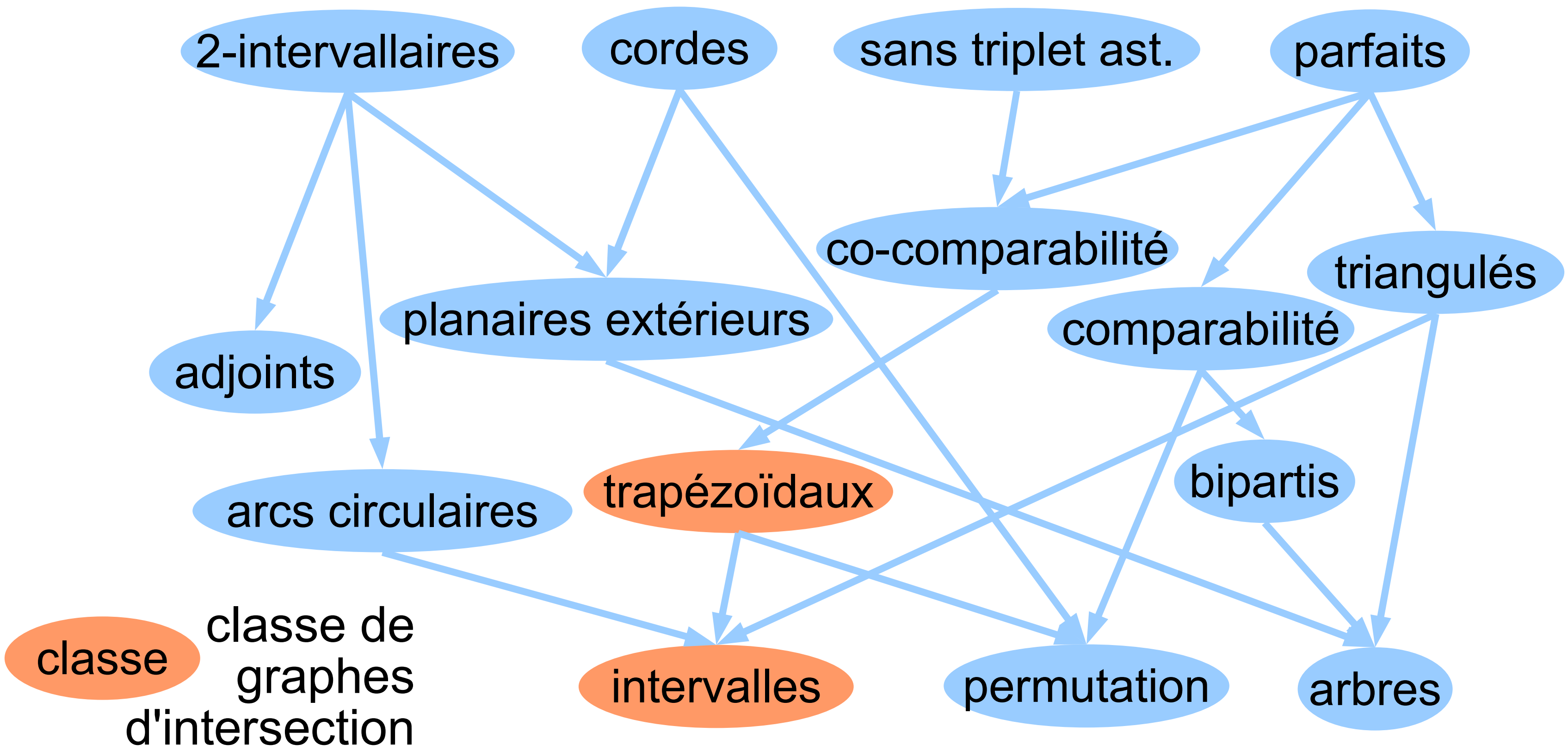
Graphe d'inclusion des classes de graphes



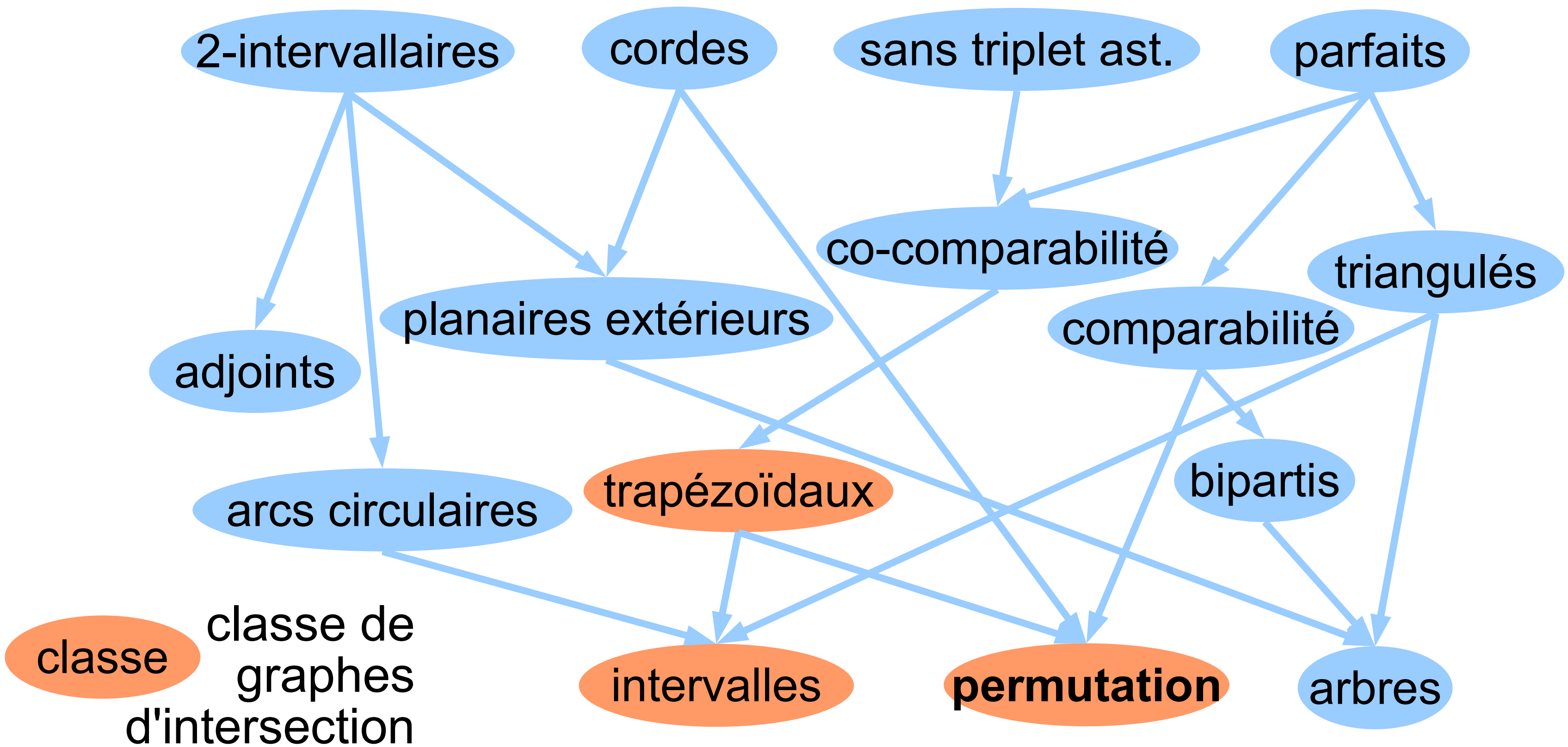
Graphe d'inclusion des classes de graphes



Graphe d'inclusion des classes de graphes

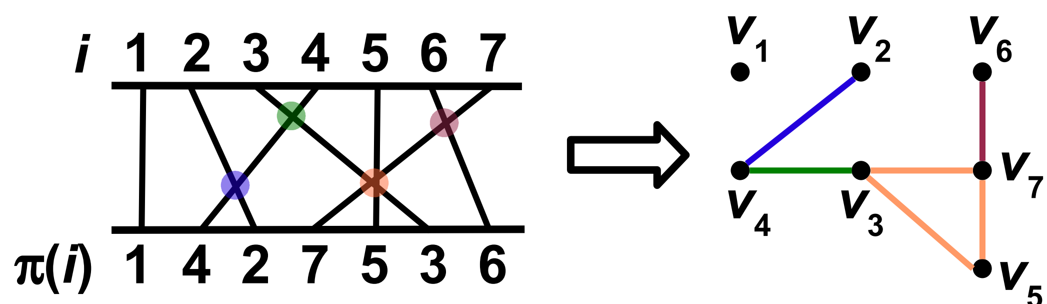


Graphe d'inclusion des classes de graphes

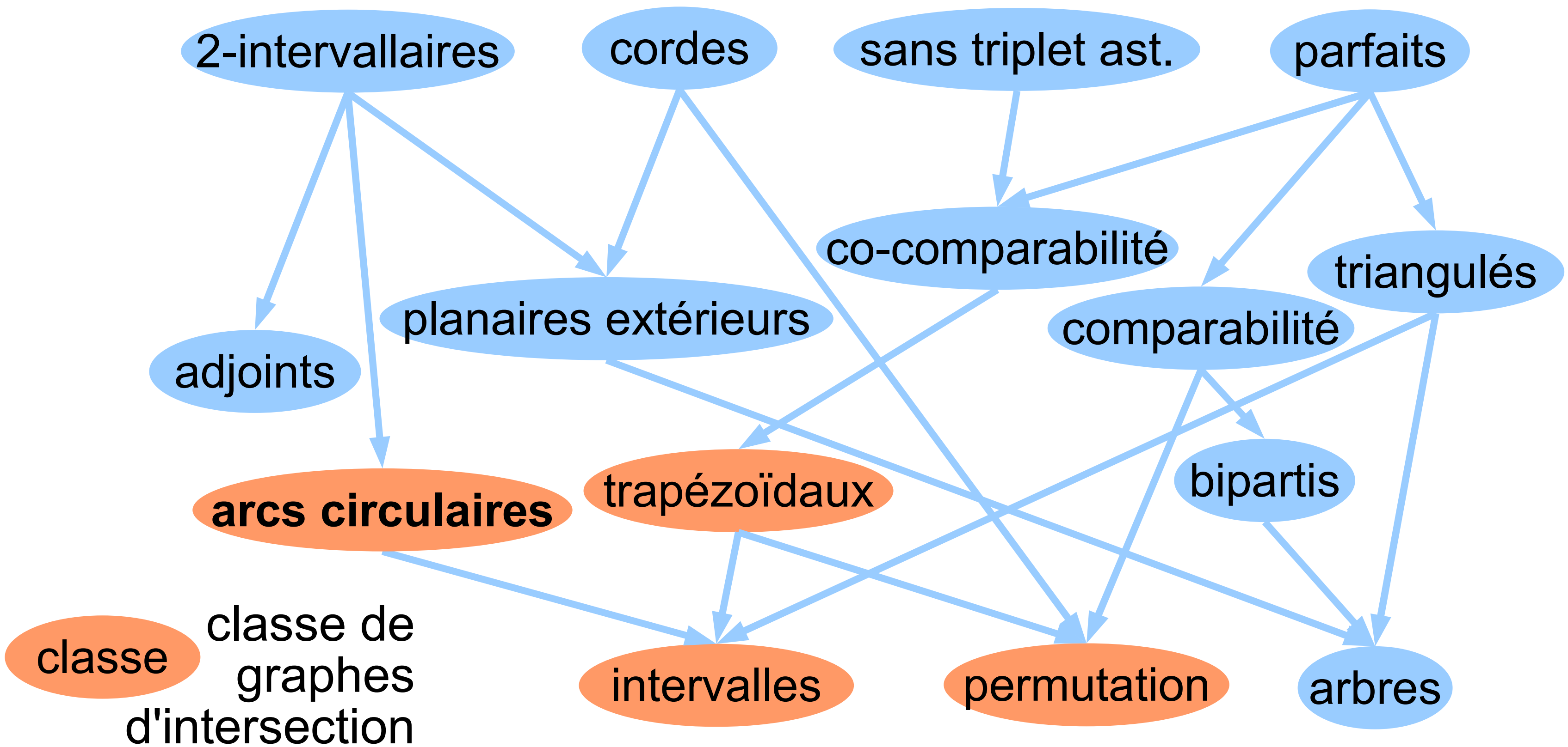


Graphe de **permutation** : graphe d'intersection des **segments (*k*,*k*)**.

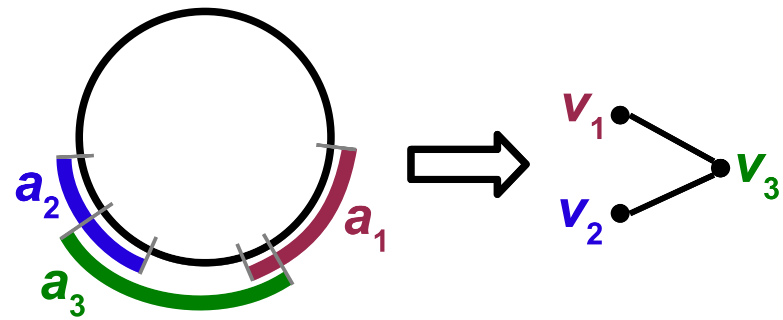
ligne des *i*   ligne des π(*i*)



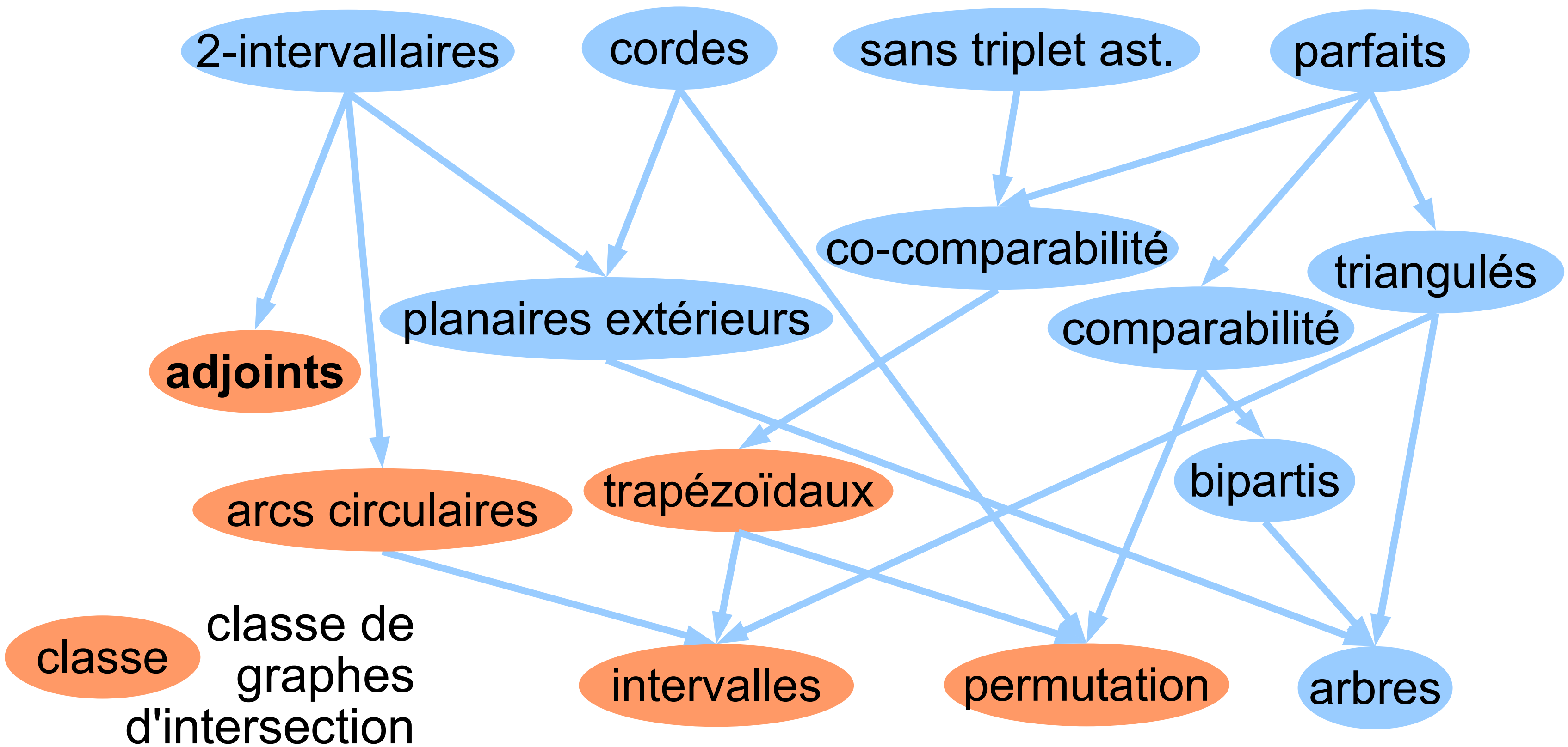
Graphe d'inclusion des classes de graphes



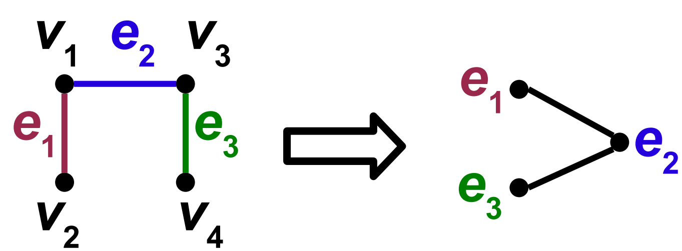
Graphe d'**arcs circulaires** : graphe d'intersection d'**arcs d'un cercle**.



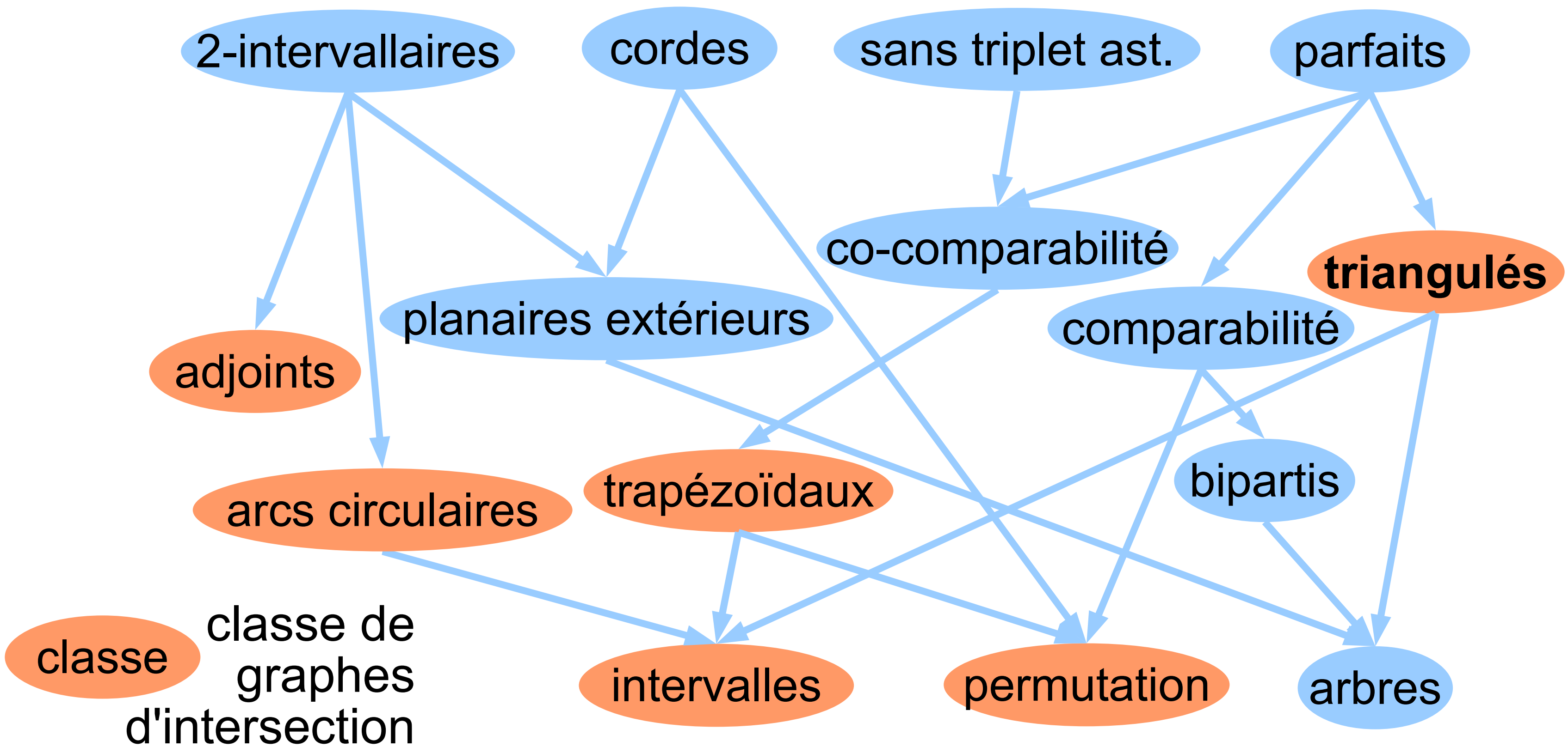
Graphe d'inclusion des classes de graphes



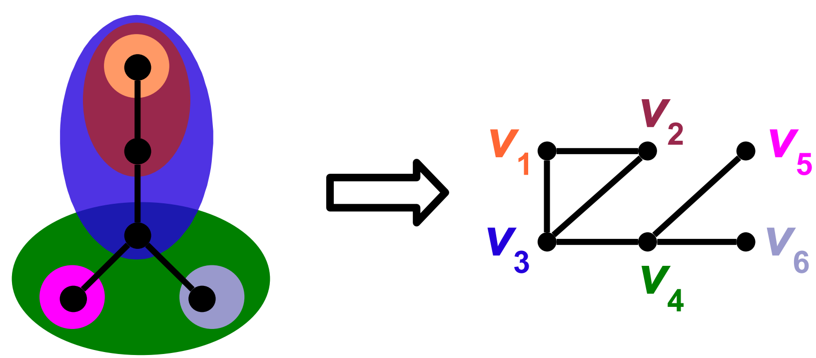
Graphe **adjoint** (***line graph***) : graphe d'intersection des **arêtes d'un graphe**.



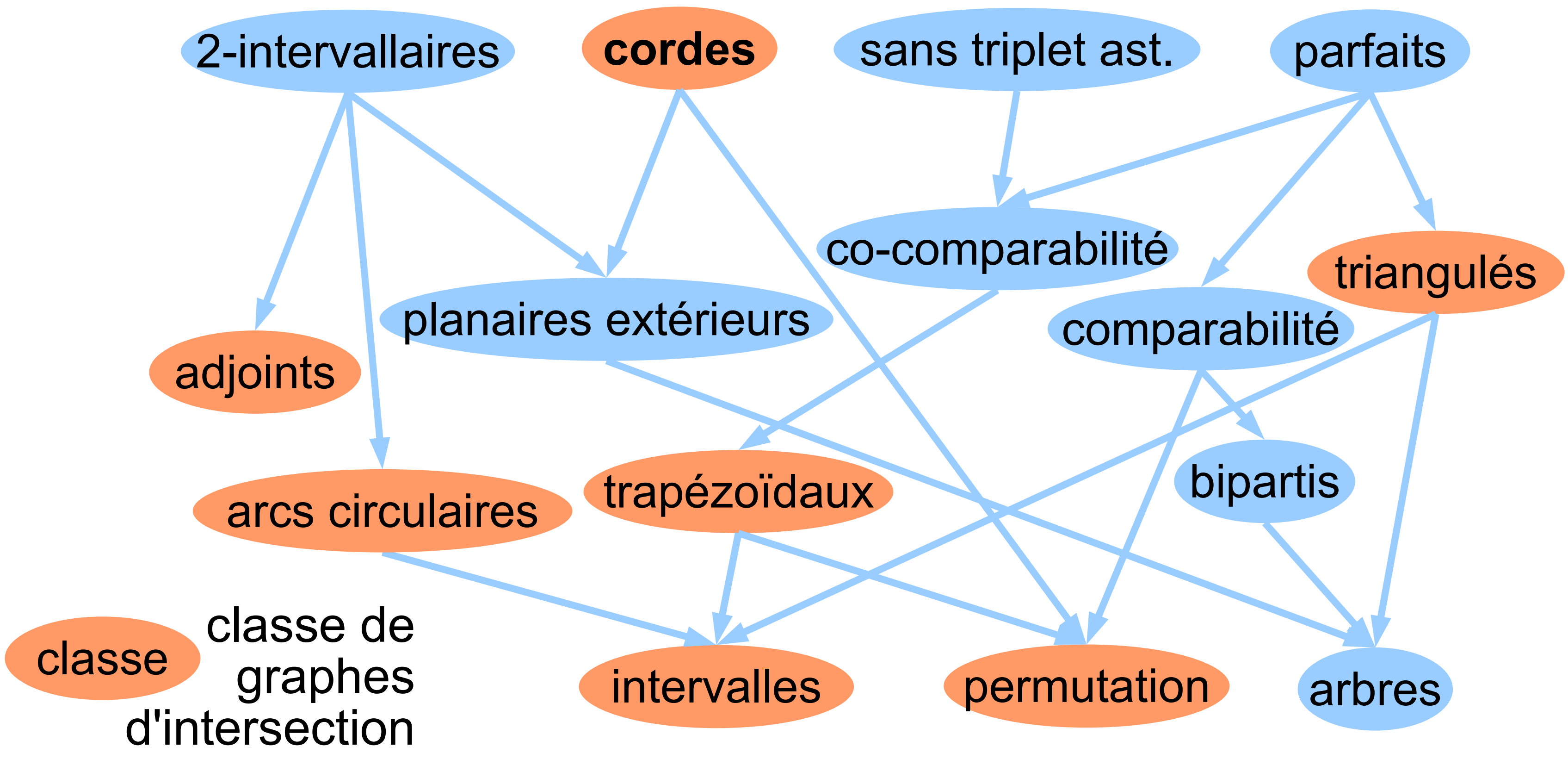
Graphe d'inclusion des classes de graphes



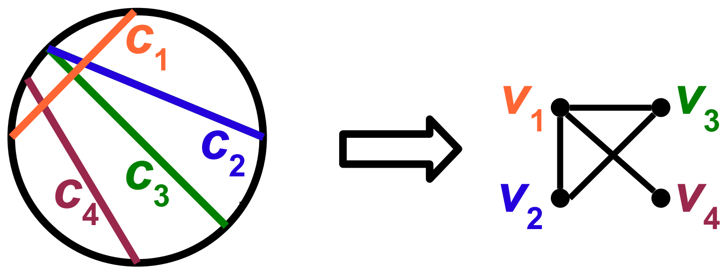
Graphe **triangulé** (***chordal***) : graphe d'intersection d'une famille de **sous-arbres d'un arbre**.



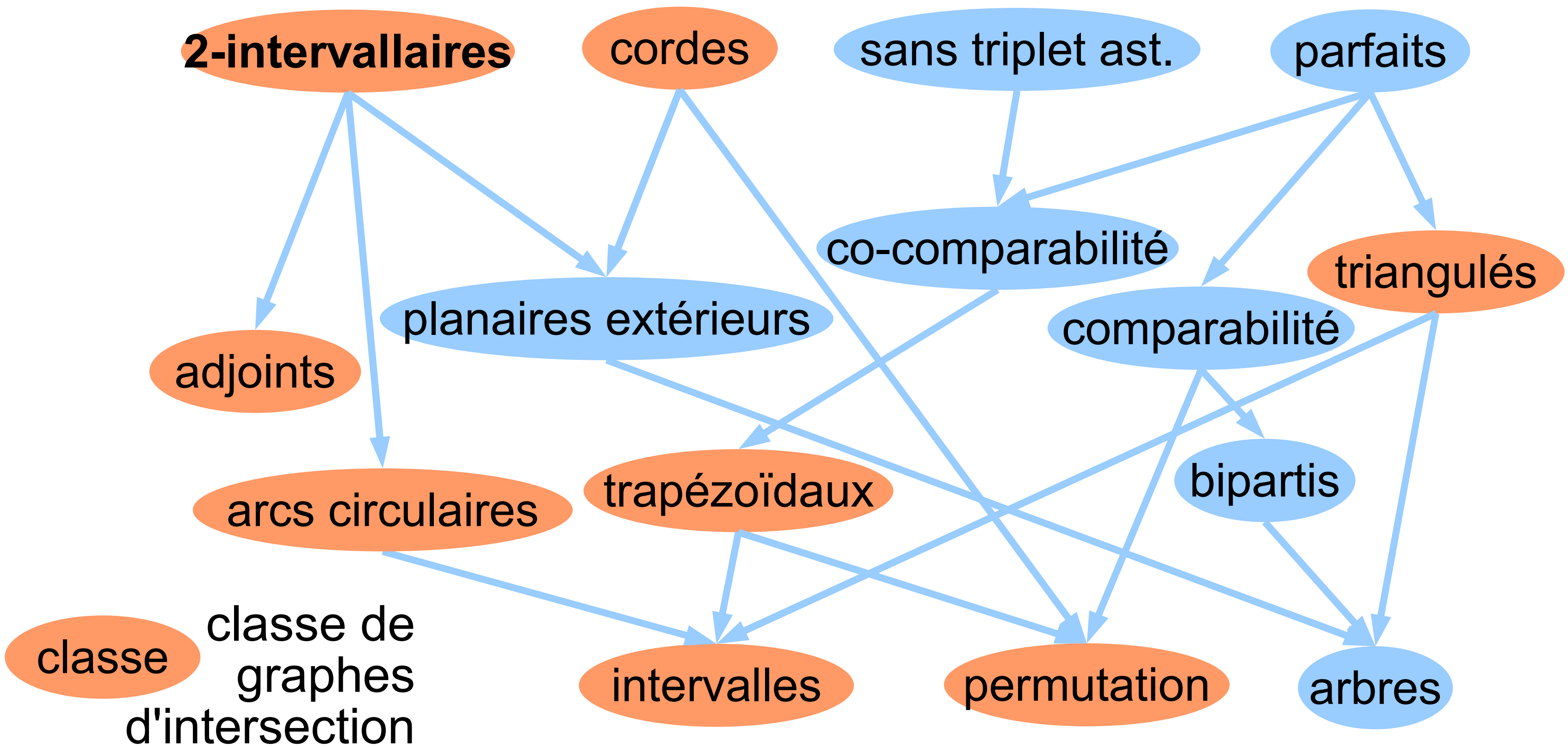
Graphe d'inclusion des classes de graphes



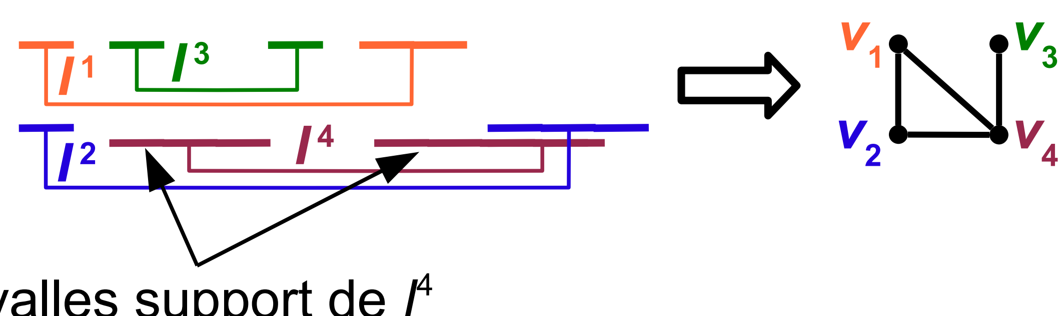
Graphe **de cordes** (***circle***) : graphe d'intersection des **cordes d'un cercle**.



Graphe d'inclusion des classes de graphes



The star of the show, graphe **2-intervallaire** : graphe d'intersection d'unions de deux intervalles.



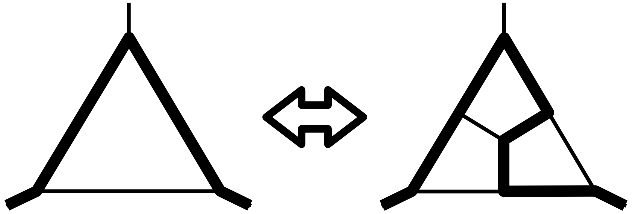
Reconnaissance des graphes 2-intervallaires

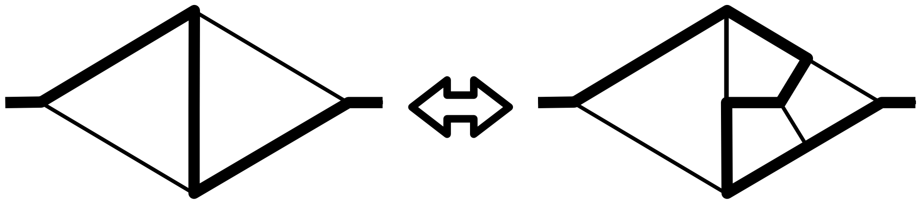
Déterminer, pour un graphe G quelconque, s'il est 2-intervallaire, est **NP-complet** [West,Shmoys,1984]

Idée de la preuve :

Par réduction du problème de **Cycle Hamiltonien sur les graphes 3-réguliers**, qui est **NP-complet** [Garey,Johnson,Tarjan,1976].

Première étape : réduction à **Cycle Hamiltonien sur les graphes 3-réguliers sans triangle**.

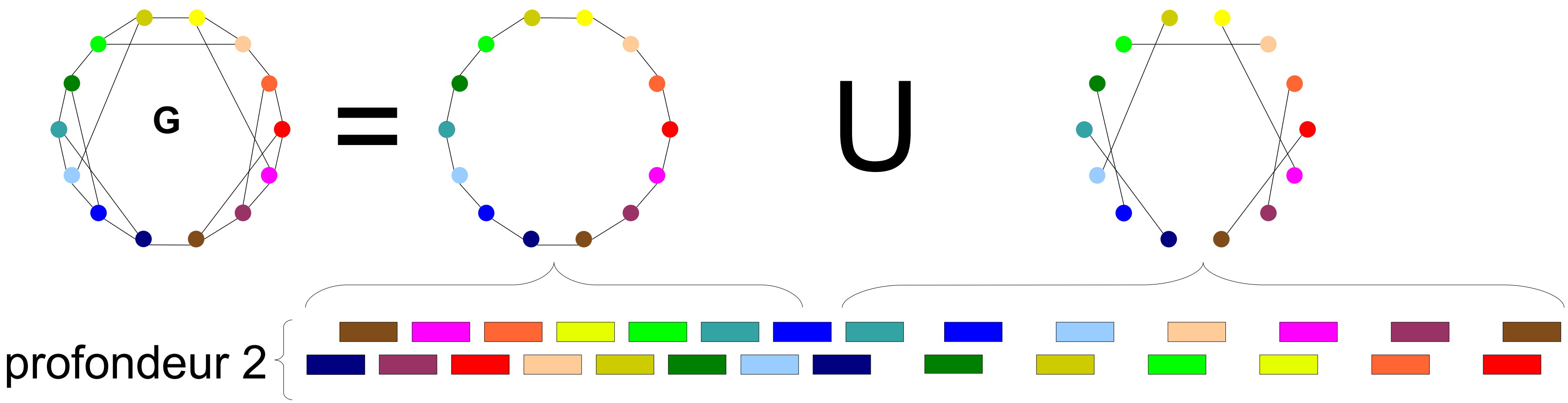




Reconnaissance des graphes 2-intervallaires

Deuxième étape : pour tout **graphe *G* 3-régulier sans triangle**, construction en temps polynomial un graphe ***G'* qui est 2-intervallaire** ssi ***G* admet un cycle hamiltonien**.

L'idée : si *G* a un cycle hamiltonien, ajouter des gadgets sur *G* pour obtenir *G'* et **forcer** que **toute réalisation** 2-intervallaire de G' soit une ***H*-représentation** :

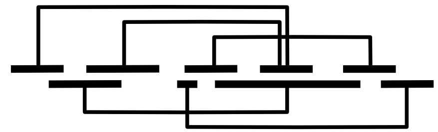


une *H*-représentation de *G*

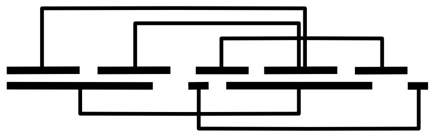
Graphes 2-intervallaires et restrictions

Support d'un ensemble de 2-intervalles :
ensemble des **intervalles support** des 2-intervalles.

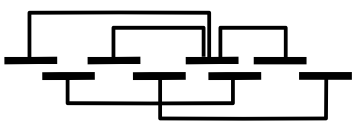
Support sans restriction :



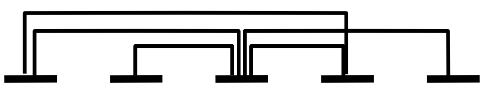
Support **équilibré :**



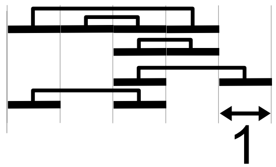
Support **unitaire :**



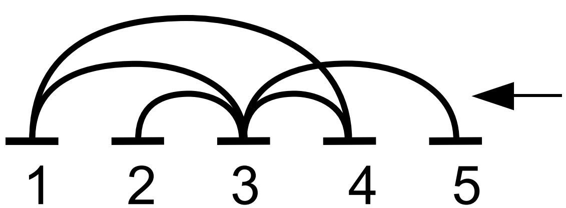
Support **disjoint :**



graphes (1,1)-intervallaires :



graphes adjoints

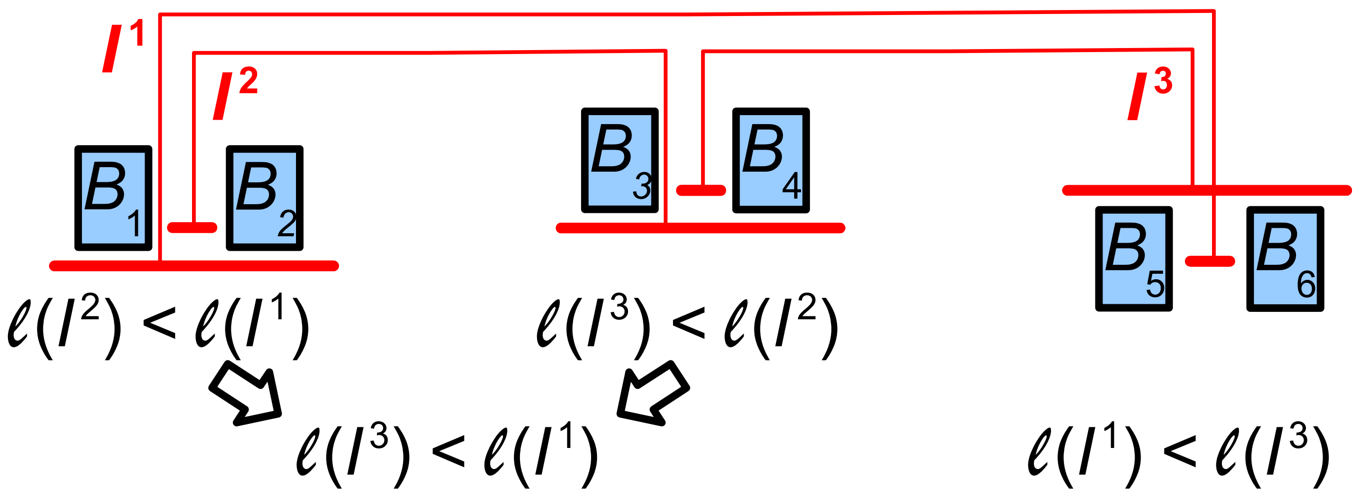


graphe aux
noeuds étiquetés
sans noeud isolé

Classe des 2-intervallaires équilibrés

La classe des **2-intervallaires équilibrés** est s**trictement incluse** dans celle des **2-intervallaires**.

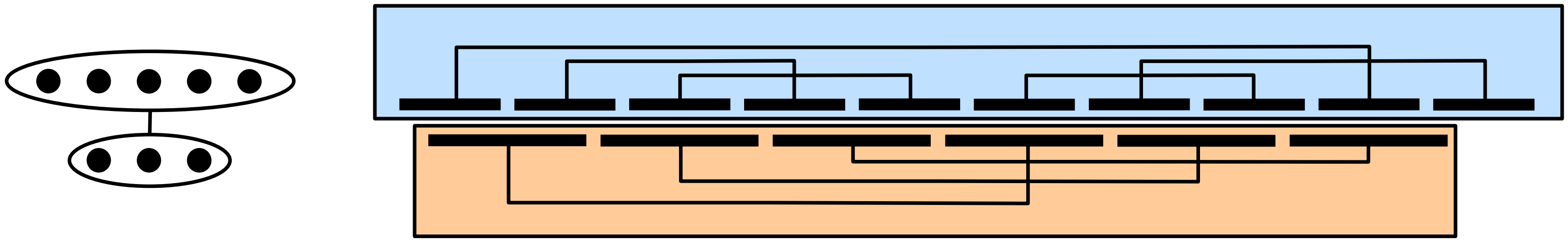
Motif de 2-intervalles non équilibrable :

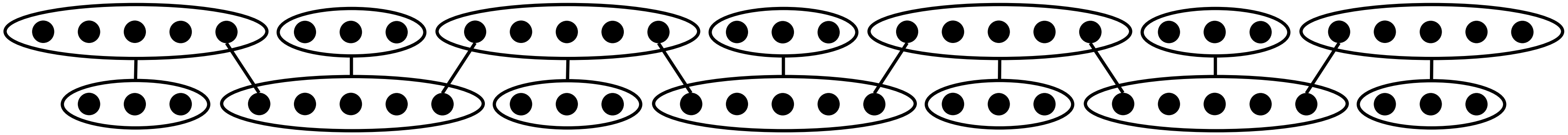


On cherche à construire un graphe où on contraint la présence de **quelque chose de longueur non nulle** (un trou entre deux intervalles) à l'intérieur de chaque boîte B_i.

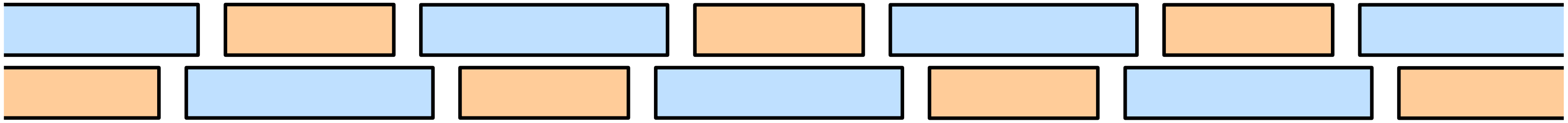
Classe des 2-intervallaires équilibrés

$K_{5,3}$ a une réalisation 2-intervallaire «en bloc » :

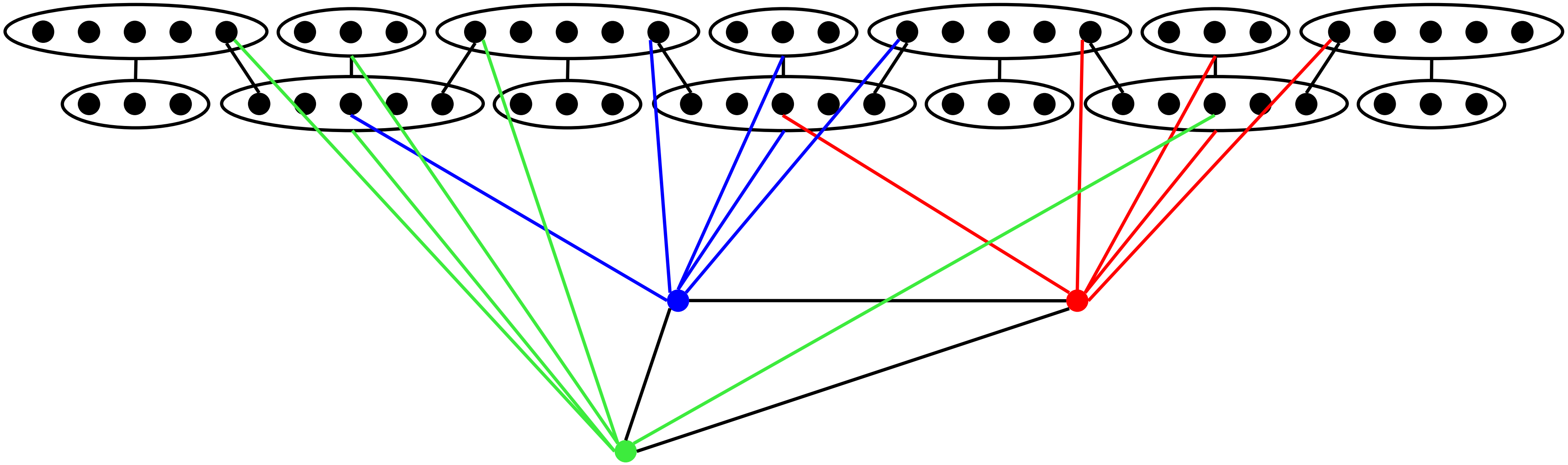




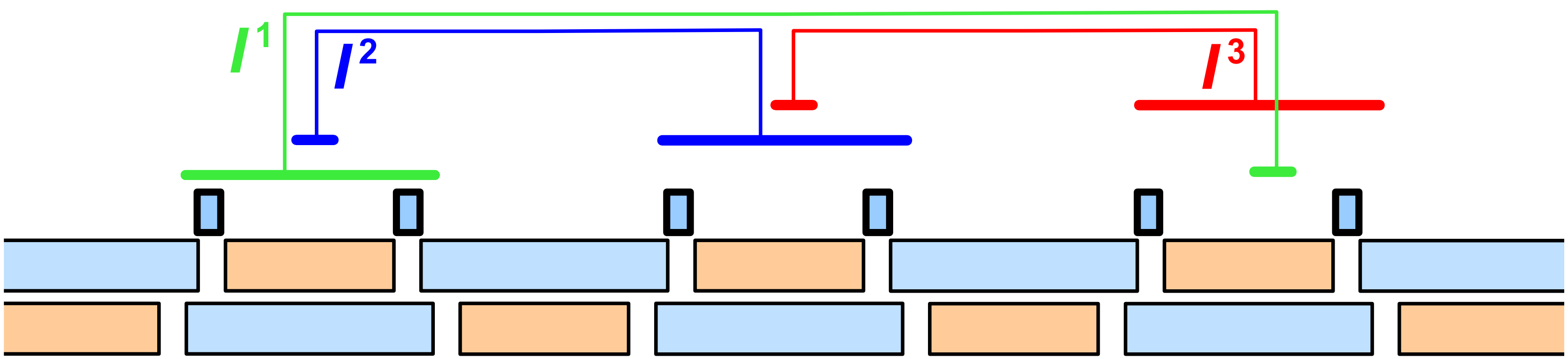
a une réalisation contrainte de la forme :



Classe des 2-intervallaires équilibrés



a une réalisation contrainte de la forme :



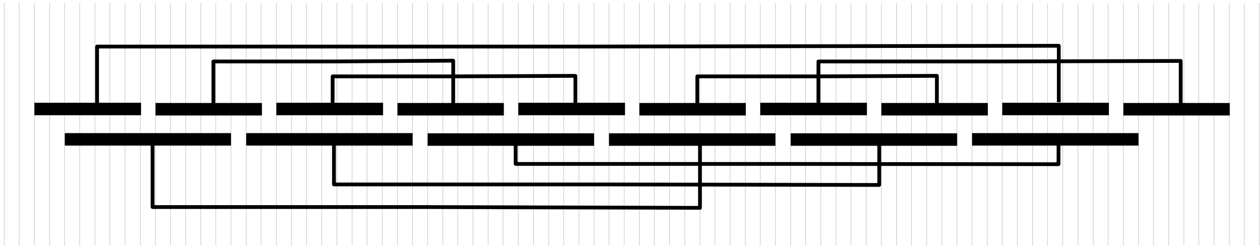
Classe des 2-intervallaires équilibrés

Déterminer, pour un graphe G quelconque, s'il est 2-intervallaire équilibré, est **NP-complet**.

Idée de la preuve :

Adapter la preuve de West & Shmoys en utilisant des gadgets équilibrés (par simple dilatation le plus souvent).

En particulier $K_{5,3}$:



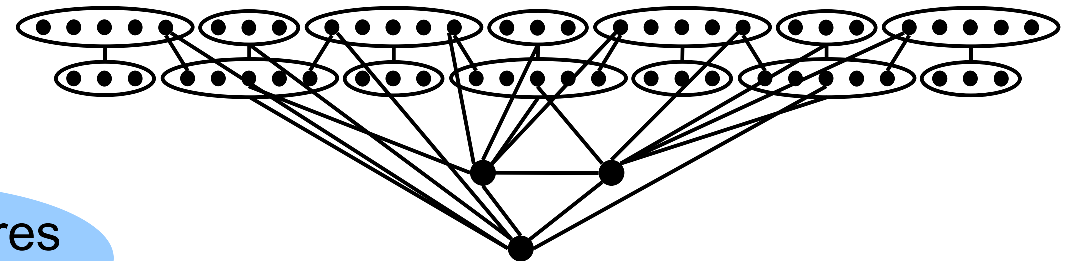
Mais la preuve ne s'adapte pas pour les **unitaires**.

Hiérarchie des 2-intervallaires restreints

Reconnaissance :

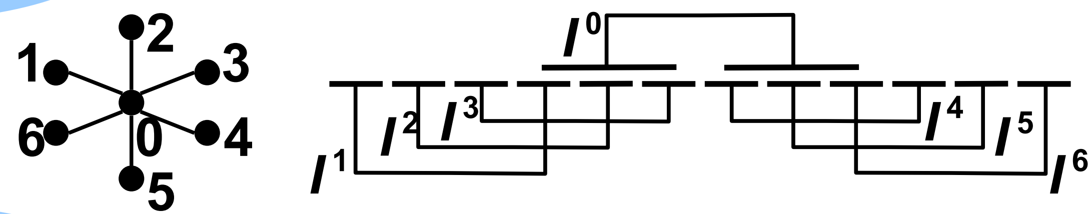
NP-complète — 2-intervallaires

⊋



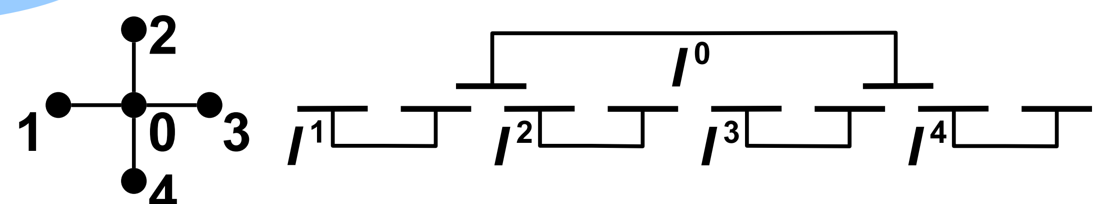
NP-complète — 2-intervallaires équilibrés

⊋



2-intervallaires unitaires

⊋



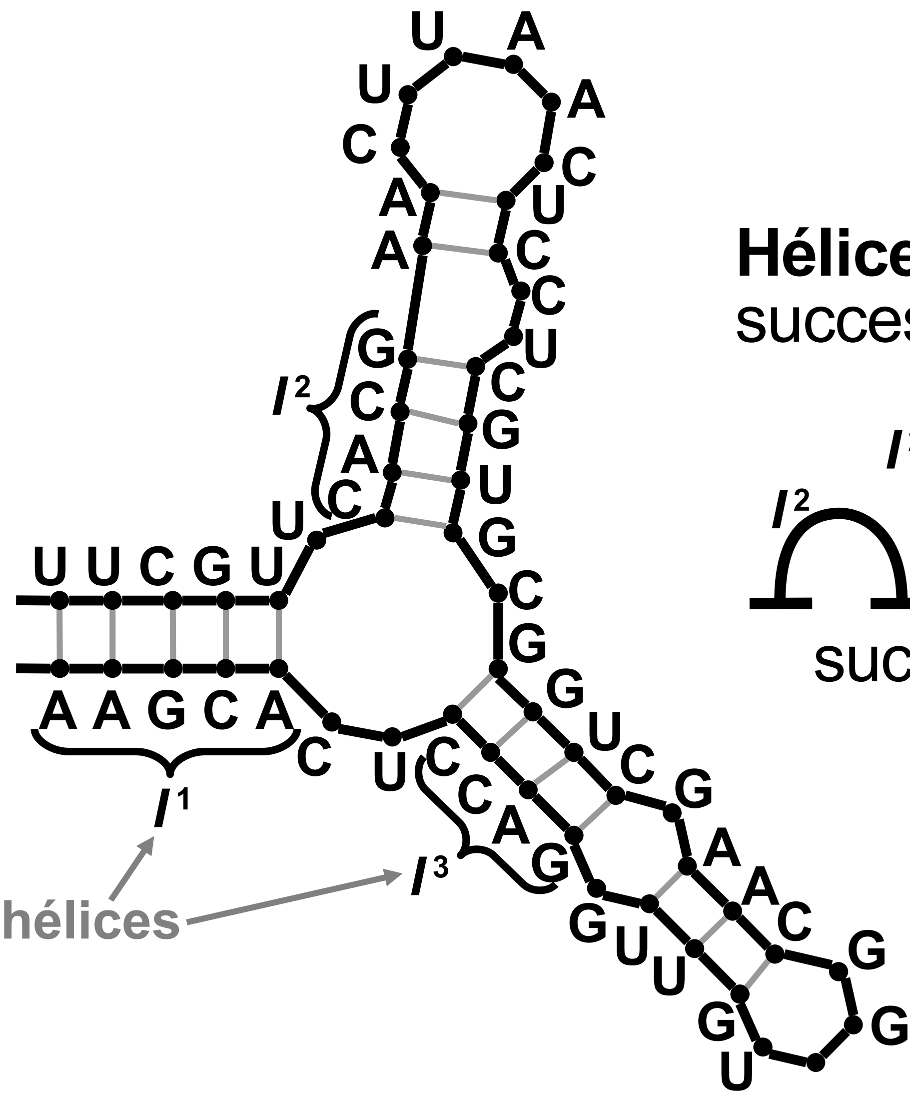
Linéaire — (1,1)-intervallaires

Motivations

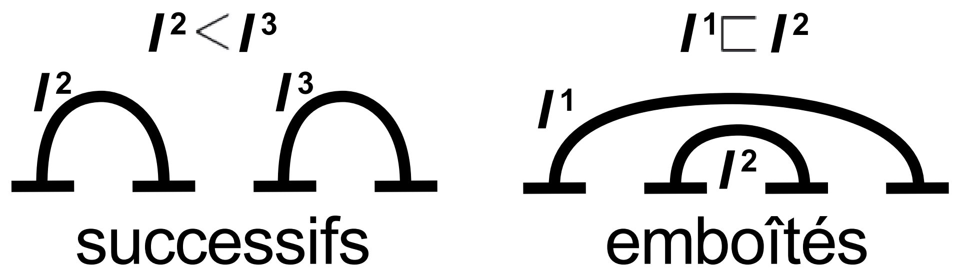
Un **2-intervalle** modélise :

- une tâche coupée en 2 dans un problème d'**ordonnancement**
- deux portions similaires ou complémentaires inversées d'**ADN**
- deux portions complémentaires et inversées d'**ARN**
- deux extraits « mis en relation » dans une **partition musicale**

Motivations : cas de l'ARN

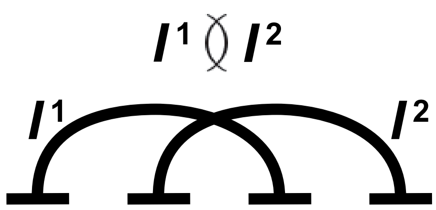


Hélices : appariements de portions successives ou emboîtées d'ARN.

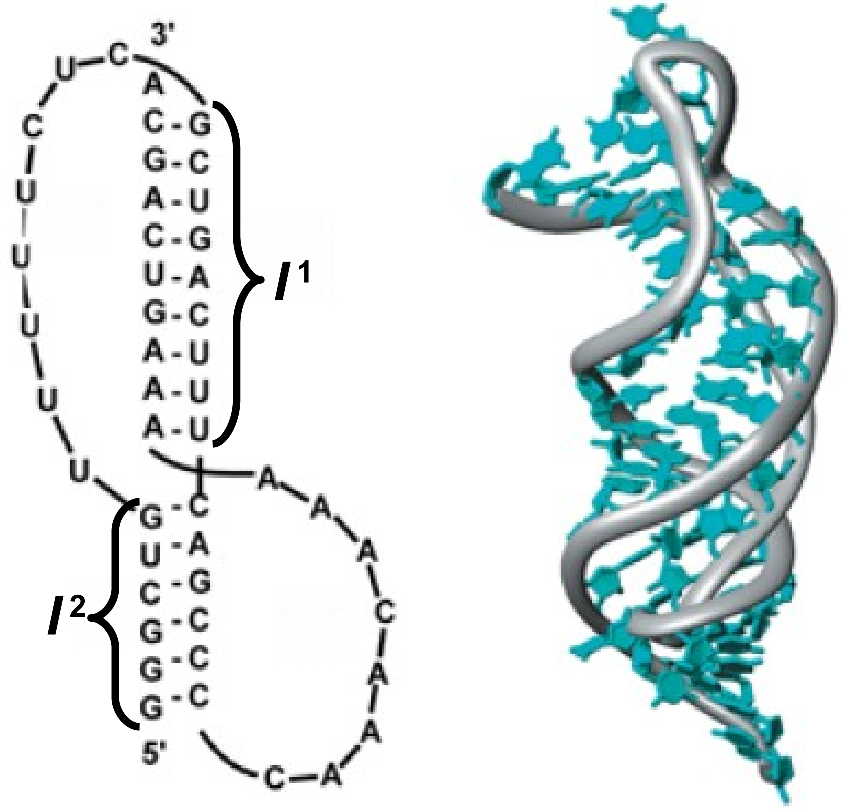


Motivations : cas de l'ARN

Pseudo-noeud :
appariement de nucléotides entrelacés.



croisés



Extrémité 5' du composant ARN de la télomérase humaine

D'après D.W. Staple, S.E. Butcher, *Pseudoknots: RNA structures with Diverse Functions* (PloS Biology 2005 3:6 p.957)

Vers la théorie des graphes : stable max

Trouver les **hélices** d'un ARN sans pseudo-noeud
donné comme une suite de nucléotides.

$\Updownarrow$

Trouver le plus **grand sous-ensemble** de 2-intervalles
disjoints, uniquement **successifs ou emboîtés**,
dans un ensemble de 2-intervalles.

$\Updownarrow$

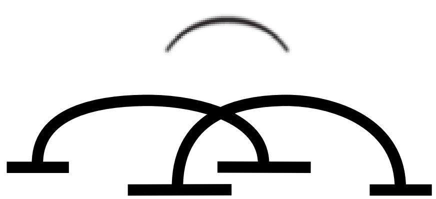
Trouver le **stable maximum** du graphe tel que :

- les **sommets** correspondent aux **2-intervalles**,
- une **arête** joint deux 2-intervalles qui **s'intersectent**,
- une **arête** joint deux 2-intervalles **croisés.**

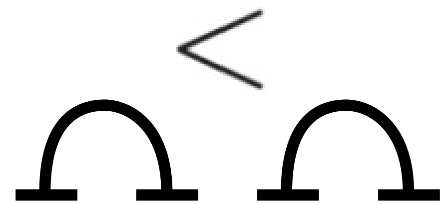
Graphes 2-intervallaires et variantes

16 variantes de la classe des graphes de 2-intervalles :

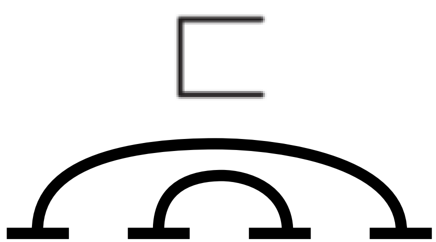
- les **sommets** correspondent aux **2-intervalles**
- une **arête** joint deux 2-intervalles qui sont :



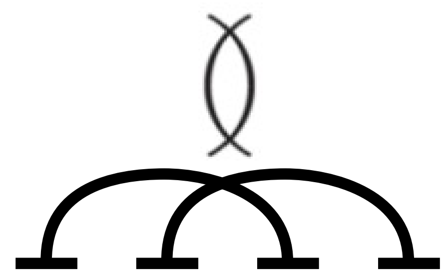
intersectants



successifs



emboîtés



croisés

8 classes à caractériser (et leur complémentaire)

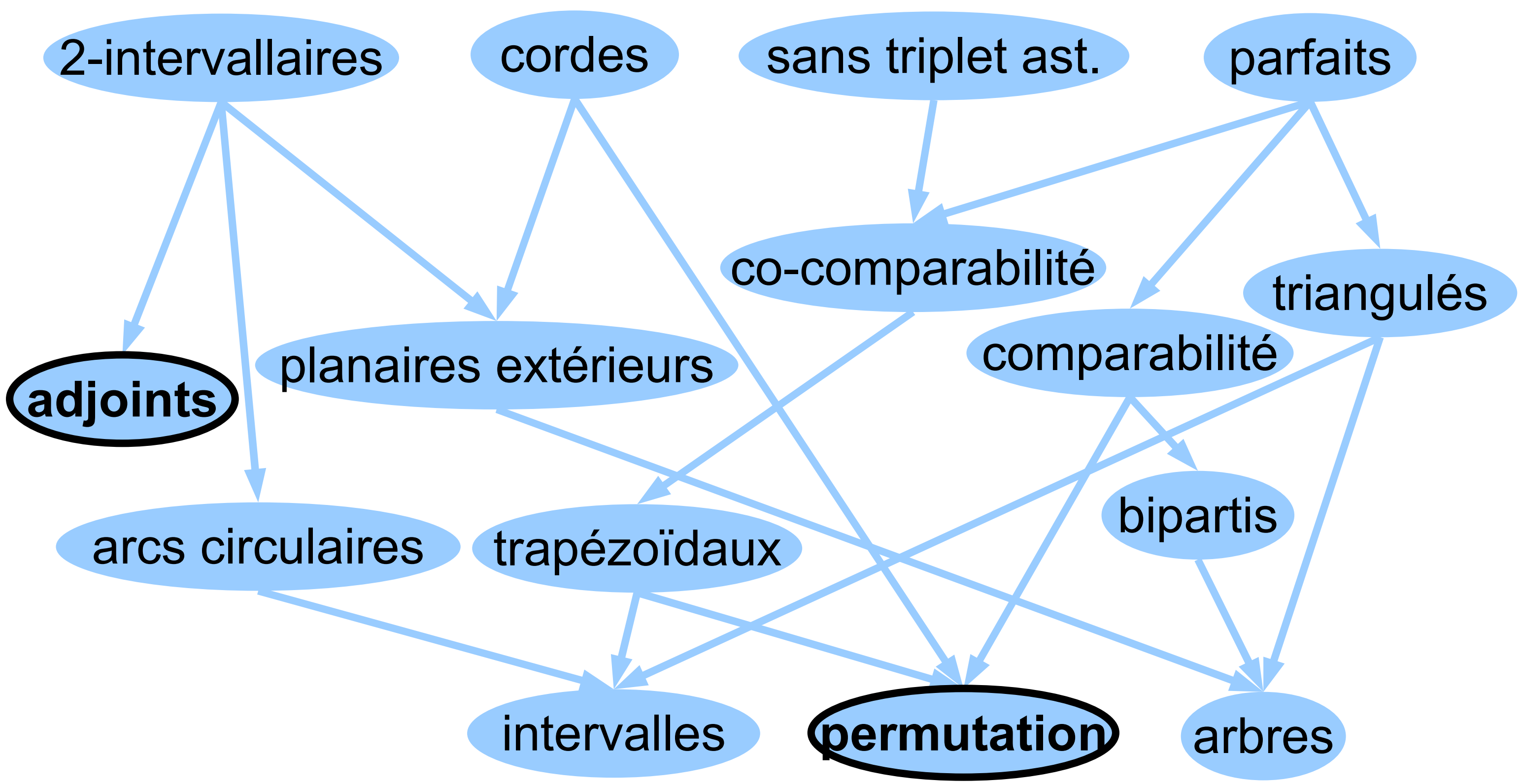
Variantes des graphes 2-intervallaires

<table>
<tr><th>Support :</th><th>sans restriction</th><th>disjoint</th></tr>
<tr><td>$\{\frown, \sqsubset, <, \between\}$</td><td>clique</td><td>clique</td></tr>
<tr><td>$\{\frown\}$</td><td>2-intervallaires</td><td>adjoints</td></tr>
<tr><td>$\{\frown, \sqsubset\}$</td><td rowspan="2">Classes inconnues, stable max NP-complet</td><td>Classe inconnue, stable max inconnu</td></tr>
<tr><td>$\{\frown, <\}$</td><td>Classe inconnue, stable max polynomial</td></tr>
<tr><td>$\{\frown, \between\}$</td><td rowspan="2">Inclusions utiles dans des classes de graphes</td><td>cordes</td></tr>
<tr><td>$\{\frown, \sqsubset, <\}$</td><td>$\overline{\text{cordes}}$</td></tr>
<tr><td>$\{\frown, \sqsubset, \between\}$</td><td>intervalles</td><td>intervalles</td></tr>
<tr><td>$\{\frown, <, \between\}$</td><td>trapézoïdaux</td><td>permutation</td></tr>
</table>

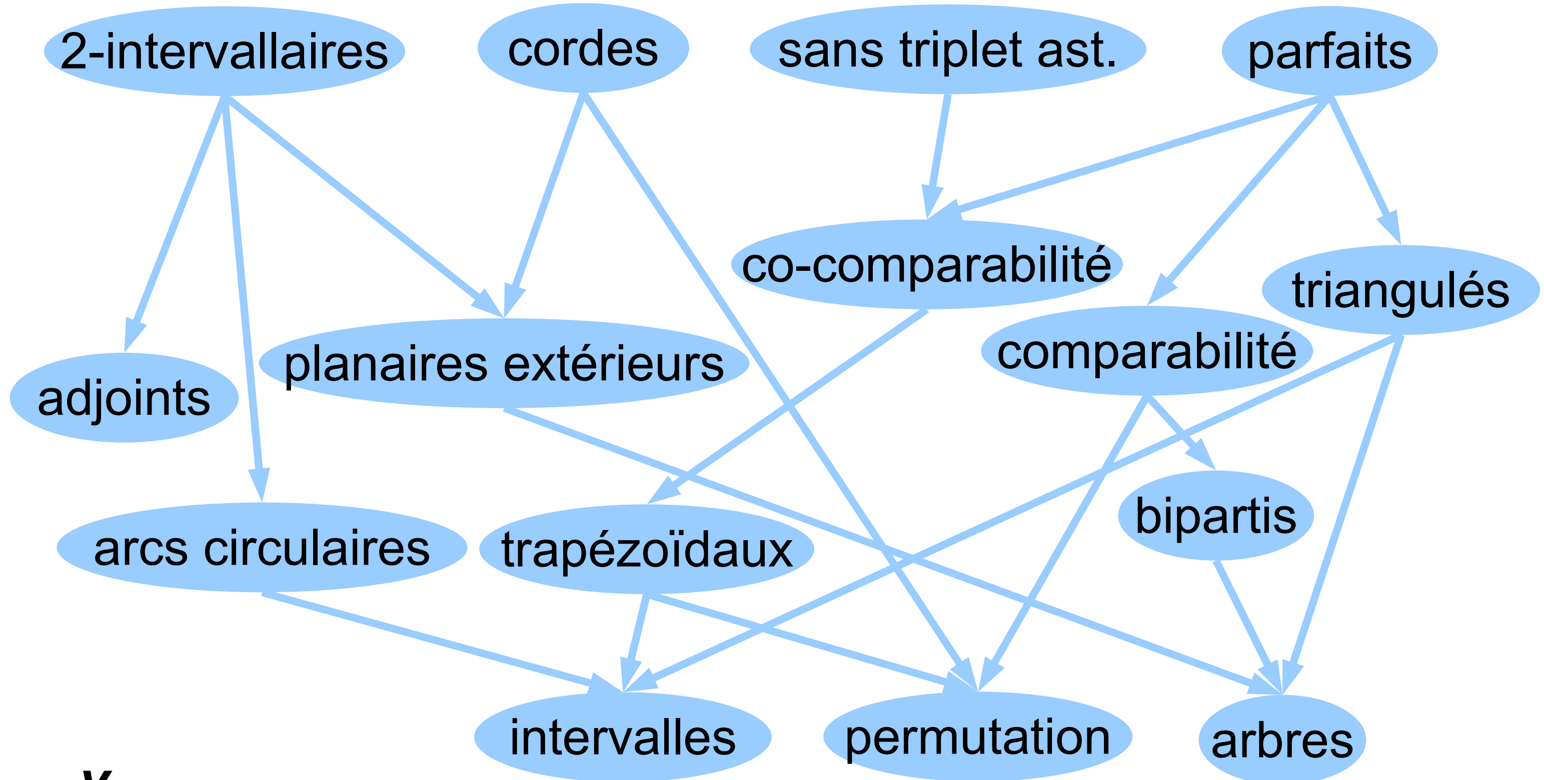
Classe des $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires

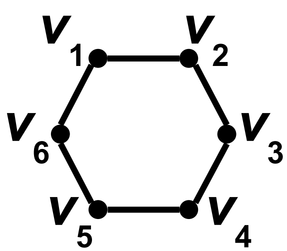
Un graphe $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaire est l'union

d'un **graphe adjoint** et d'un **graphe de permutation**.

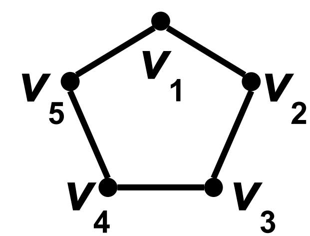


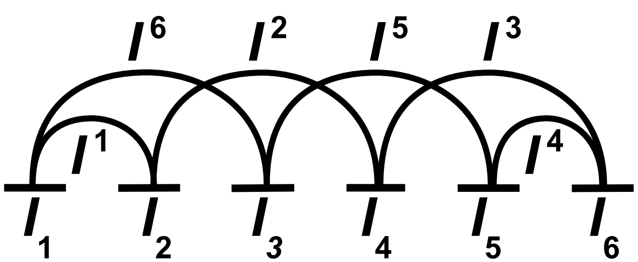
Classe des $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires

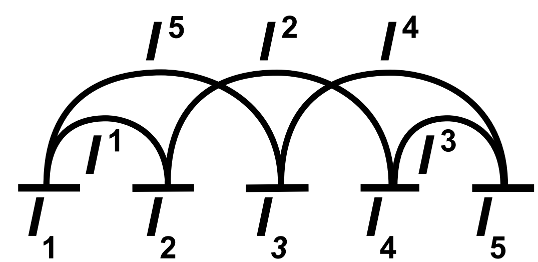




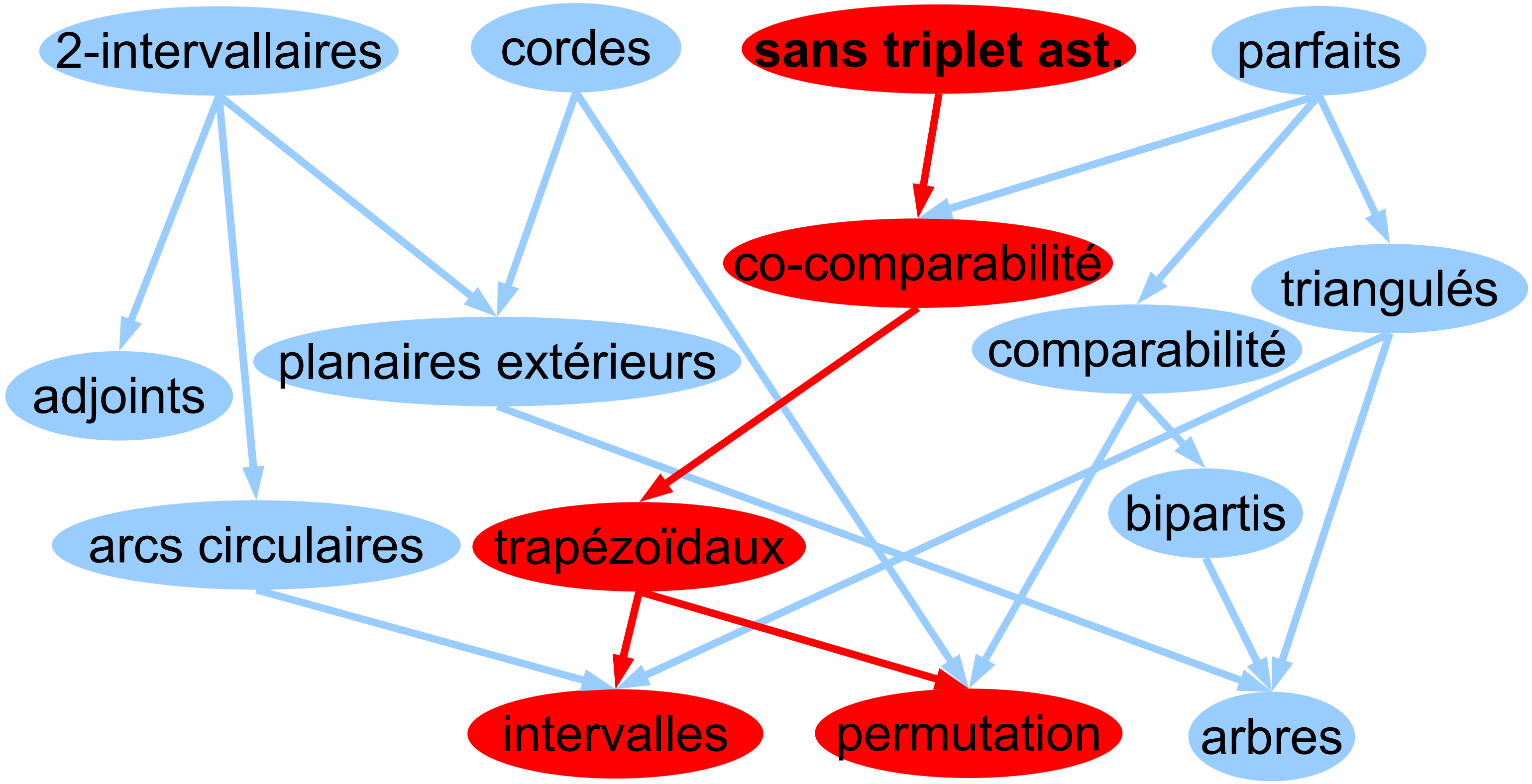
Les **cycles** sont des graphes $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires.

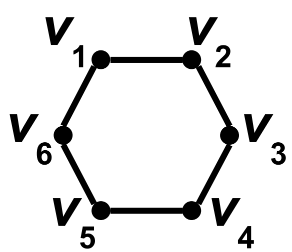


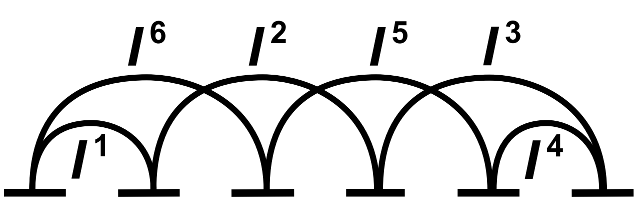




Classe des $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires



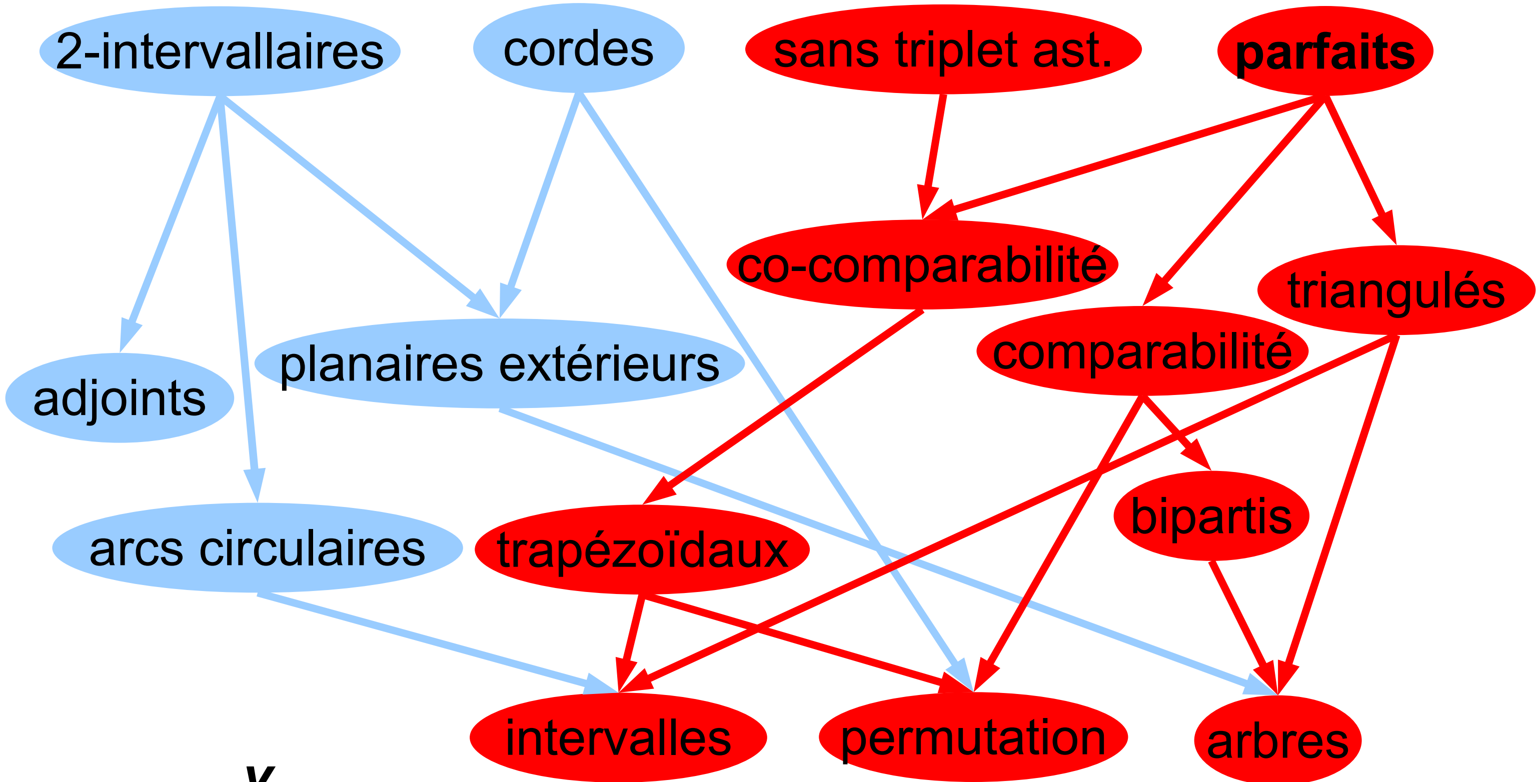




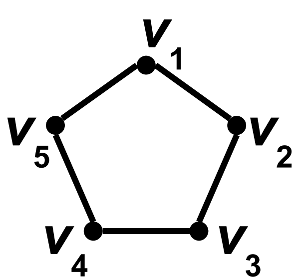
classe de graphes ne contenant pas celle des $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires

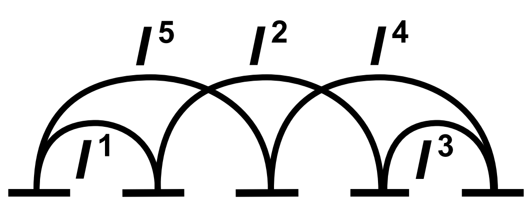
Les **cycles** sont des graphes $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires.

Classe des $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires



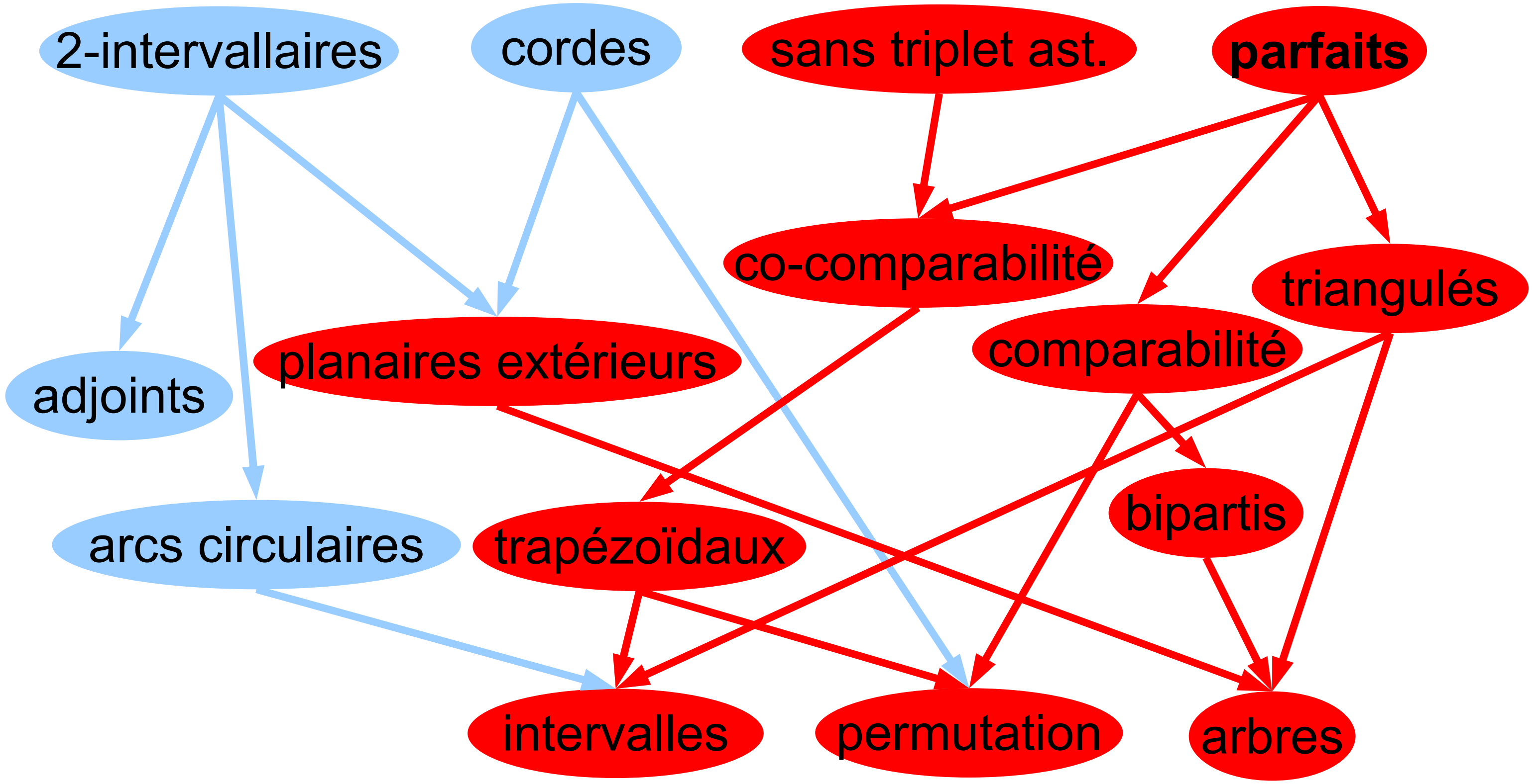
classe de graphes ne contenant pas celle des $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires





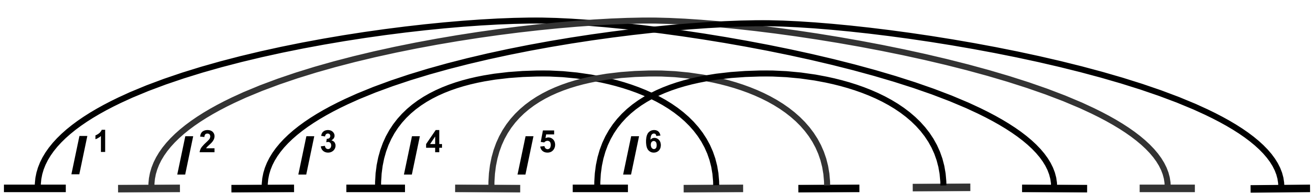
Les **cycles** sont des graphes $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires.

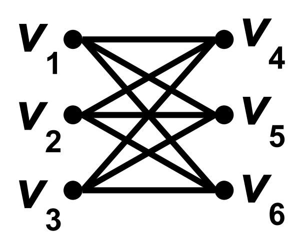
Classe des $\{\frown,\sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires



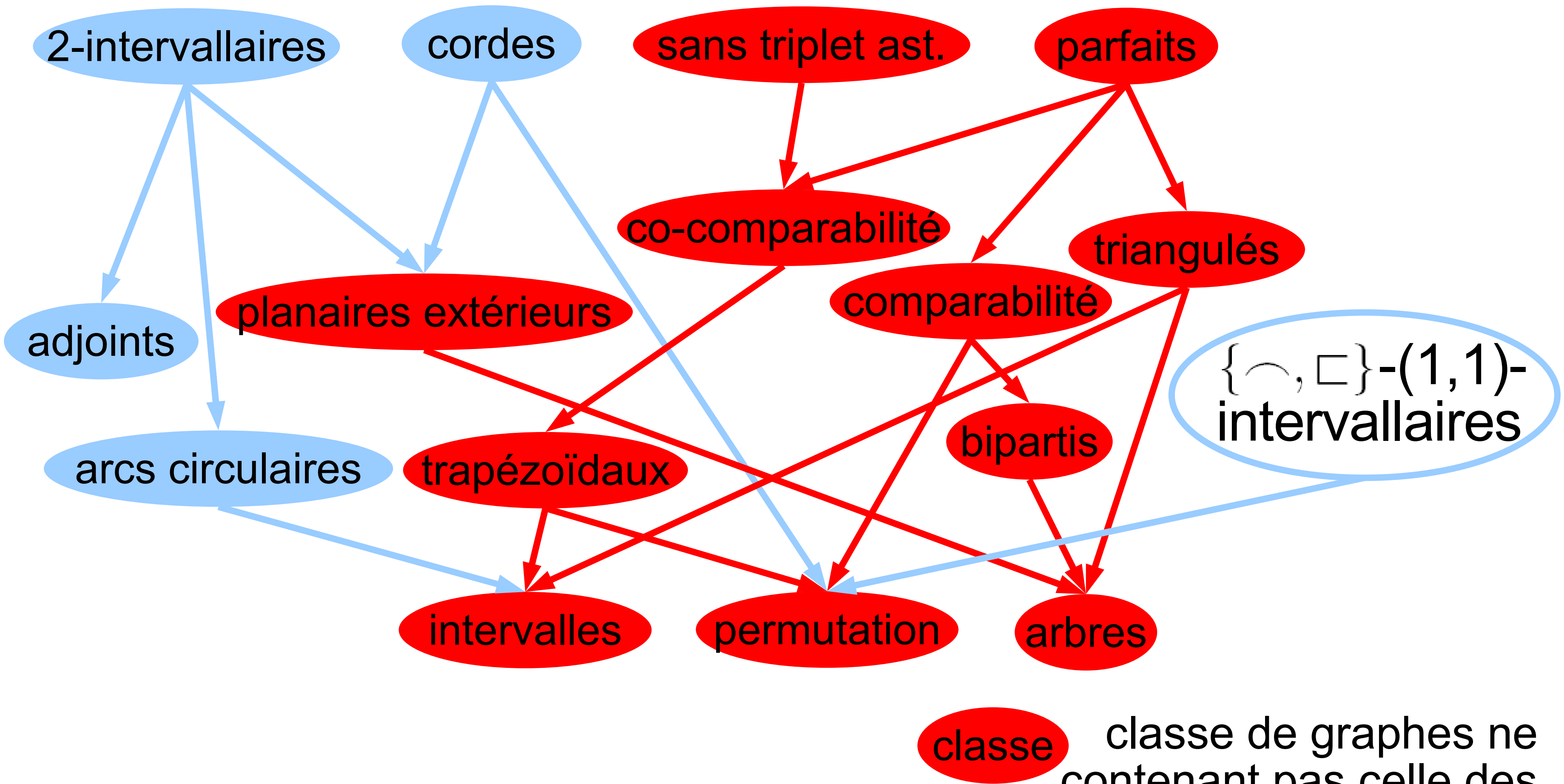
Les **bipartis complets** sont des graphes $\{\frown,\sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires.

classe : classe de graphes ne contenant pas celle des $\{\frown,\sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires





Classe des $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires



Les **graphes de permutation** sont des graphes $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires.

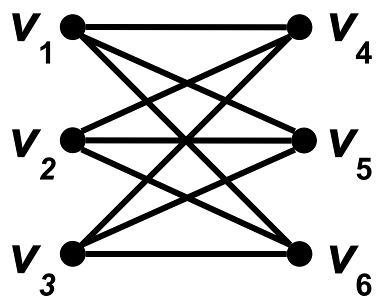
Classe des $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires

Graphes interdits ?

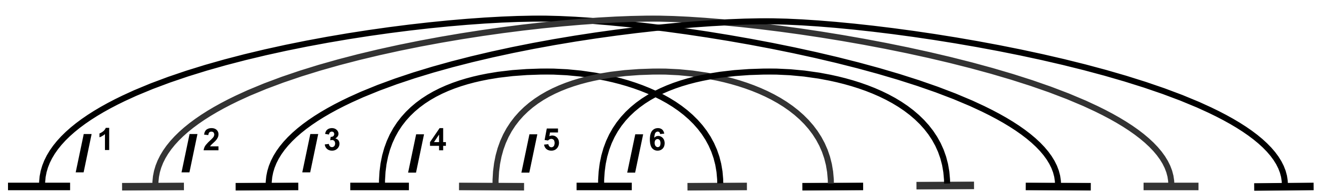
Les **cographes** sont des graphes de permutation donc des $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires, donc les graphes interdits contiennent un P_4.

On vérifie que tous les graphes à 5 noeuds ou moins sont $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires.

On exhibe un sous-graphe interdit à 9 sommets :



a 40 réalisations.



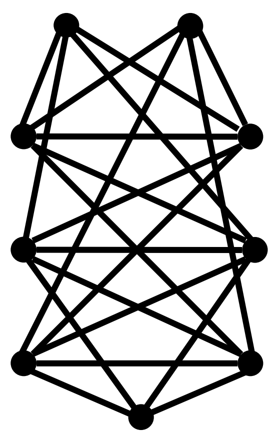
Classe des $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires

Graphes interdits ?

Les **cographes** sont des graphes de permutation donc des $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires, donc les graphes interdits contiennent un P_4.

On vérifie que tous les graphes à 5 noeuds ou moins sont $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires.

On exhibe un sous-graphe interdit à 9 sommets :



n'a aucune réalisation.

Conclusion

- Des problèmes de complexité restent ouverts :
  - autre formulation pour le problème du stable max, sur le diagramme de Hasse de la partie graphe de permutation du graphe $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaire.
  - complexité de la reconnaissance des (k,k)-intervallaires (k>1) ?
  - clique maximum sur les 2-intervallaires ?