Séminaire thésards LIAFA/PPS

Graphes 2-intervallaires et classes de graphes d'intersection apparentées

Philippe Gambette

http://philippe.gambette.free.fr/LIAFA

LIAFA

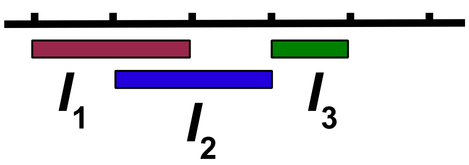
Plan

- Graphes d'intervalles et énigme policière
- D'autres classes de graphes d'intersection
- Graphes 2-intervallaires
- Restrictions sur les graphes 2-intervallaires équilibrés
- Graphes 2-intervallaires équilibrés
- Quelques motivations pour les 2-intervallaires
- Problème du stable maximum
- Variantes de la classe des graphes 2-intervallaires
- Séquences arc-annotées
- Graphes $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires

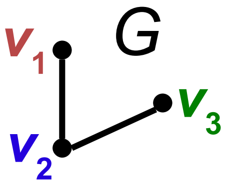
Les graphes d'intervalles

$\mathcal{I} = \{[0,2],[1,3],[3,4]\}$

des **noeuds** $\Leftrightarrow$ des **ensembles**



une **arête** entre deux noeuds $\Leftrightarrow$ les deux ensembles ont une **intersection non vide**

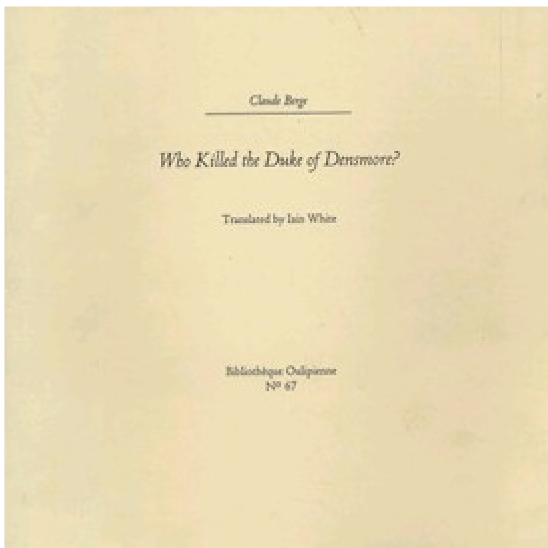


$\mathcal{I}$ est une **réalisation** du **graphe d'intersection** *G*.

G est un **graphe d'intervalles.**

Qui a tué le Duc de Densmore ?

Une nouvelle de **Claude Berge**, un des fondateurs de l'**Oulipo** et de la **théorie des graphes moderne** (1926-2002).



Claude Berge, *Qui a tué le Duc de Densmore ?*, La Bibliothèque oulipienne, n°67, 1994.

Chevaleret, Paris, 1999 © Michel Las Vergnas

Qui a tué le Duc de Densmore ?

Le duc de Densmore est retrouvé mort dans l'explosion d'une pièce de son château de l'île de White. Le meurtre a été commis à l'aide d'une bombe placée avec précaution dans le labyrinthe du château, ce qui a nécessité une longue préparation en cachette dans le labyrinthe.

Or, avant son assassinat, le duc avait invité 8 femmes sur l'île, celles-ci se rappellent quelles autres femmes elles y ont vu, mais ont oublié à quelle date précise elles y étaient :
- Ann a vu Betty, Cynthia, Emily, Felicia et Georgia
- Betty a vu Ann, Cynthia et Helen
- Cynthia a vu Ann, Betty, Diana, Emily et Helen
- Diana a vu Cynthia et Emily
- Emily a vu Ann, Cynthia, Diana et Felicia
- Felicia a vu Ann et Emily
- Georgia a vu Ann et Helen
- Helen a vu Betty, Cynthia et Georgia

Le marin qui faisait la navette vers l'île a aussi oublié les dates, mais il se souvient n'avoir transporté chacune que pour un seul aller retour.

Qui a tué le Duc de Densmore ?

Le duc de Densmore est retrouvé mort dans l'explosion d'une pièce de son château de l'île de White. Le meurtre a été commis à l'aide d'une bombe placée avec précaution dans le labyrinthe du château, ce qui a nécessité une longue préparation en cachette dans le labyrinthe.

Or, avant son assassinat, le duc avait invité 8 femmes sur l'île, celles-ci se rappellent quelles autres femmes elles y ont vu, mais ont oublié à quelle date précise elles y étaient :

- Ann a vu Betty, Cynthia, Emily, Felicia et Georgia
- Betty a vu Ann, Cynthia et Helen
- Cynthia a vu Ann, Betty, Diana, Emily et Helen
- Diana a vu Cynthia et Emily
- Emily a vu Ann, Cynthia, Diana et Felicia
- Felicia a vu Ann et Emily
- Georgia a vu Ann et Helen
- Helen a vu Betty, Cynthia et Georgia

Le marin qui faisait la navette vers l'île a aussi oublié les dates, mais il se souvient n'avoir transporté chacune que pour **un seul aller retour**.

Qui a tué le Duc de Densmore ?

Le duc de Densmore est retrouvé mort dans l'explosion d'une pièce de son château de l'île de White. Le meurtre a été commis à l'aide d'une bombe placée avec précaution dans le labyrinthe du château, ce qui a nécessité une longue préparation en cachette dans le labyrinthe.

Or, avant son assassinat, le duc avait invité 8 femmes sur l'île, celles-ci **se rappellent quelles autres femmes elles y ont vu**, mais ont oublié à quelle date précise elles y étaient :
- Ann a vu Betty, Cynthia, Emily, Felicia et Georgia
- Betty a vu Ann, Cynthia et Helen
- Cynthia a vu Ann, Betty, Diana, Emily et Helen
- Diana a vu Cynthia et Emily
- Emily a vu Ann, Cynthia, Diana et Felicia
- Felicia a vu Ann et Emily
- Georgia a vu Ann et Helen
- Helen a vu Betty, Cynthia et Georgia

Le marin qui faisait la navette vers l'île a aussi oublié les dates, mais il se souvient n'avoir transporté chacune que pour **un seul aller retour**.

Qui a tué le Duc de Densmore ?

Le duc de Densmore est retrouvé mort dans l'explosion d'une pièce de son château de l'île de White. Le meurtre a été commis à l'aide d'une bombe placée avec précaution dans le labyrinthe du château, ce qui a nécessité une longue préparation en cachette dans le labyrinthe.

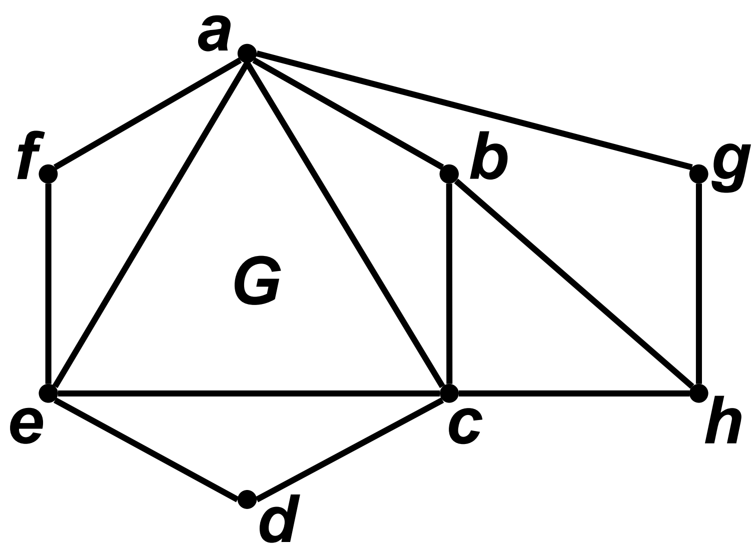
Or, avant son assassinat, le duc avait invité 8 femmes sur l'île, celles-ci **se rappellent quelles autres femmes elles y ont vu**, mais ont oublié à quelle date précise elles y étaient :

- Ann a vu Betty, Cynthia, Emily, Felicia et Georgia
- Betty a vu Ann, Cynthia et Helen
- Cynthia a vu Ann, Betty, Diana, Emily et Helen
- Diana a vu Cynthia et Emily
- Emily a vu Ann, Cynthia, Diana et Felicia
- Felicia a vu Ann et Emily
- Georgia a vu Ann et Helen
- Helen a vu Betty, Cynthia et Georgia

Le marin qui faisait la navette vers l'île a aussi oublié les dates, mais il se souvient n'avoir transporté chacune que pour **un seul aller retour**.

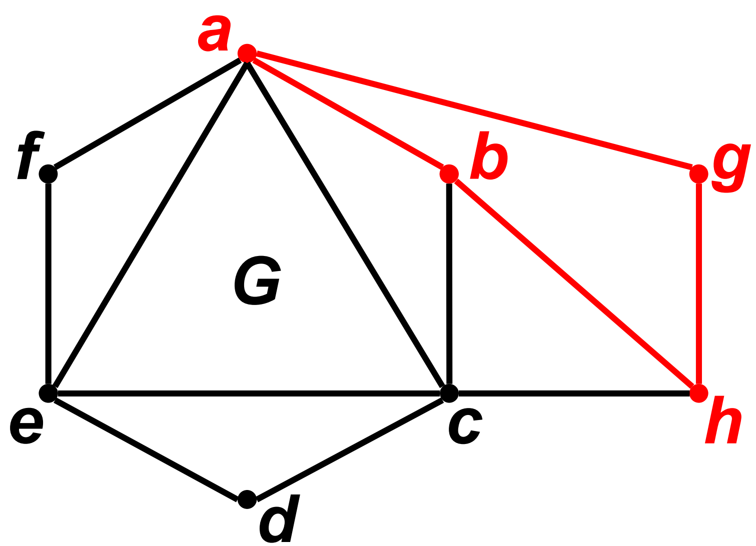
Le graphe de la relation « a vu » doit être un graphe d'intervalles.

Qui a tué le Duc de Densmore ?



Tout **sous-graphe induit** par un sous-ensemble de sommets doit être un **graphe d'intervalles**.

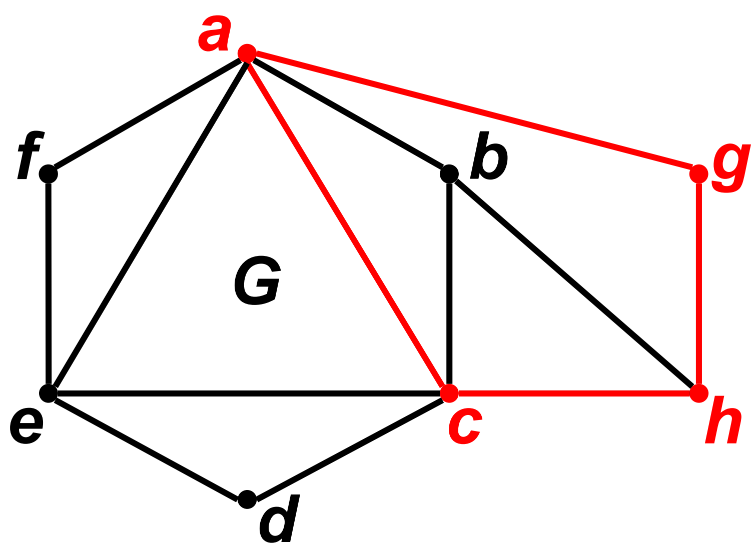
Qui a tué le Duc de Densmore ?



Tout **sous-graphe induit** par un sous-ensemble de sommets doit être un **graphe d'intervalles**.

Sous-graphe problématique :
- G[{a,b,g,h}]

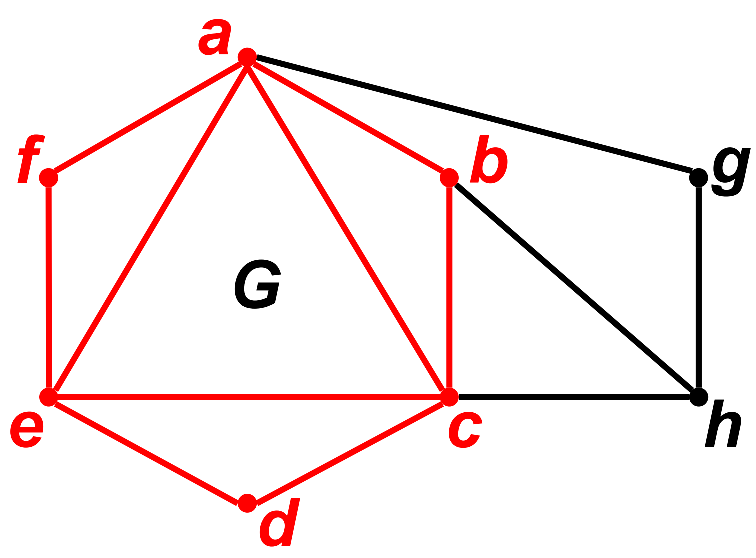
Qui a tué le Duc de Densmore ?



Tout **sous-graphe induit** par un sous-ensemble de sommets doit être un **graphe d'intervalles**.

Sous-graphes problématiques :
- G[{a,b,g,h}]
- G[{a,c,g,h}]

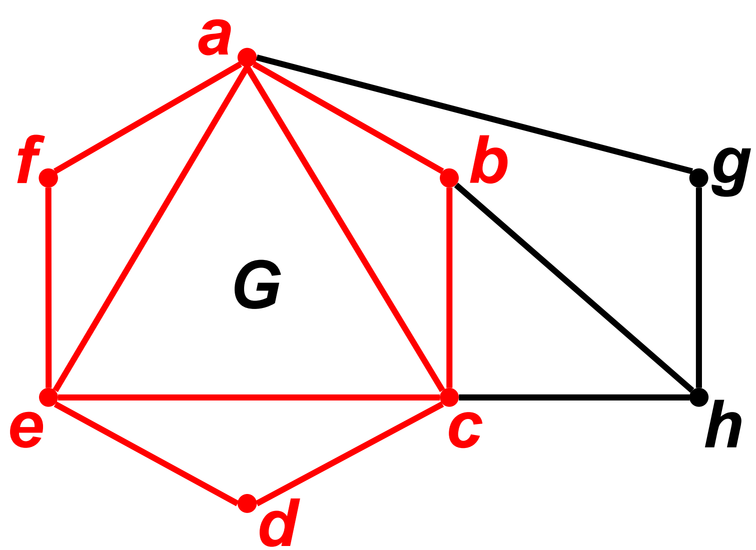
Qui a tué le Duc de Densmore ?



Tout **sous-graphe induit** par un sous-ensemble de sommets doit être un **graphe d'intervalles**.

Sous-graphes problématiques :
- G[{a,b,g,h}]
- G[{a,c,g,h}]
- G[{a,b,c,d,e,f}]

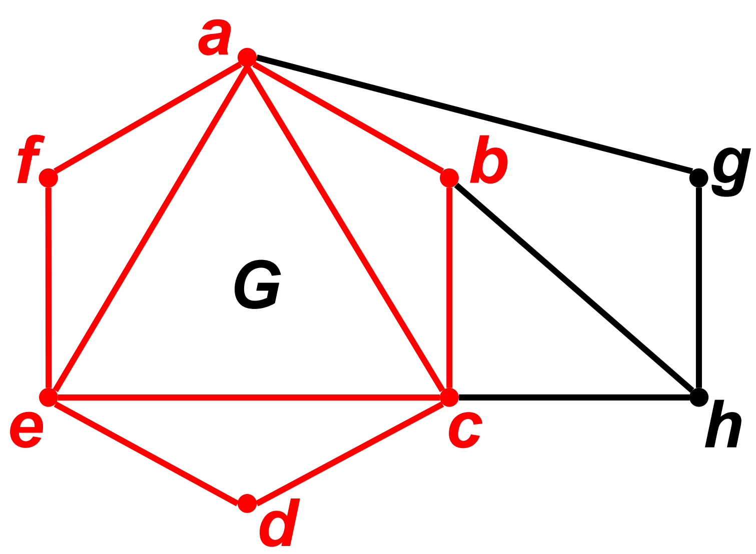
Qui a tué le Duc de Densmore ?



Tout **sous-graphe induit** par un sous-ensemble de sommets doit être un **graphe d'intervalles**.

Sous-graphes problématiques :
- G[{a,b,g,h}]
- G[{a,c,g,h}]
- G[{a,b,c,d,e,f}]

Qui a tué le Duc de Densmore ?



Tout **sous-graphe induit** par un sous-ensemble de sommets doit être un **graphe d'intervalles**.

Sous-graphes problématiques :
- G[{a,b,g,h}]
- G[{a,c,g,h}]
- G[{a,b,c,d,e,f}]

Ann est certainement la coupable !

Qui a tué le Duc de Densmore ?

Que doit-on retenir de cette histoire ?

Qui a tué le Duc de Densmore ?

Que doit-on retenir de cette histoire ?

- avec les analyses ADN, la théorie des graphes est un des **nouveaux outils d'investigation moderne** à disposition des policiers.

Qui a tué le Duc de Densmore ?

Que doit-on retenir de cette histoire ?

- la classe des graphes d'intervalles est **bien connue** et caractérisée, il existe des **algorithmes linéaires de reconnaissance** [Habib,McConnell,Paul,Viennot,2000 - Booth,Lueker,1976],

- on s'est un peu familiarisés avec les graphes d'intervalles et les contraintes sur la **réalisation** d'un graphe d'intervalles,

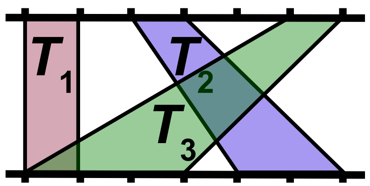
- en particulier, les **sous-graphes interdits** d'une classe de graphes,

- on a vu un exemple de ce que peuvent modéliser les graphes d'intervalles : un ensemble d'**intervalles de temps**.

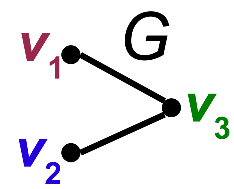
Les graphes trapézoïdaux

$\mathcal{T} = \{([0,1],[0,1]), ([2,3],[4,6]), ([5,6],[0,3])\}$

des **noeuds** ⇔ des **ensembles**



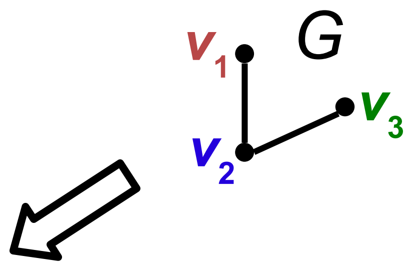
une **arête** entre deux noeuds ⇔ les deux ensembles ont une **intersection non vide**



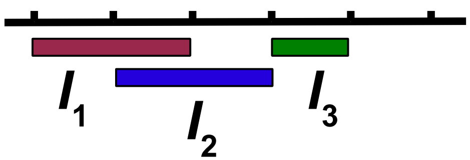
G est un ***graphe trapézoïdal.***

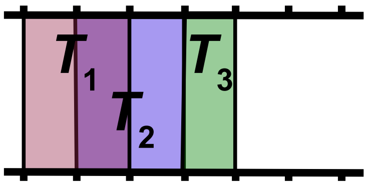
Classes de graphes

Tout graphe d'intervalles est un graphe trapézoïdal.



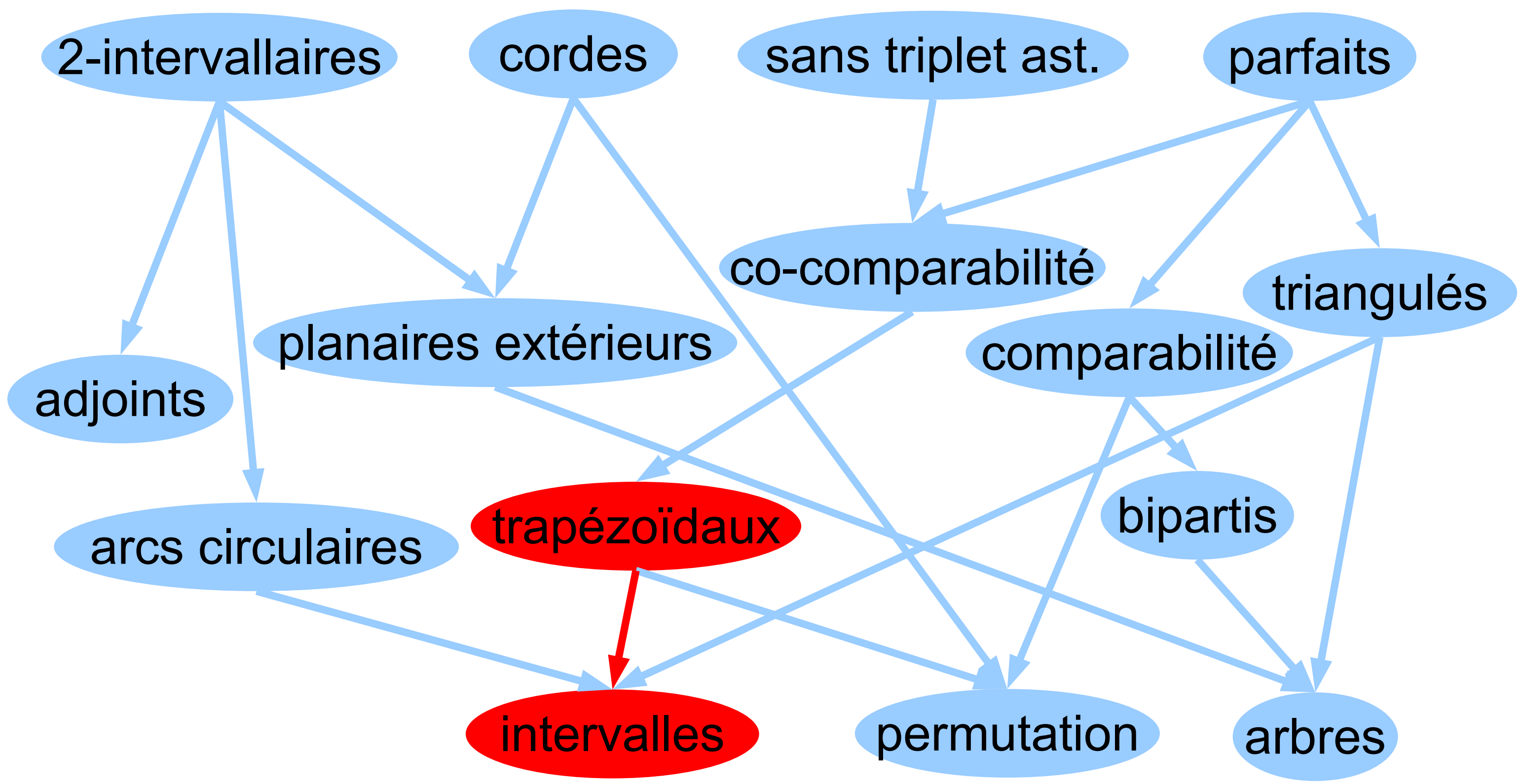
$$\mathcal{I} = \{[0,2],[1,3],[3,4]\} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{T} = \{([0,2],[0,2]),([1,3],[1,3]),([3,4],[3,4])\}$$



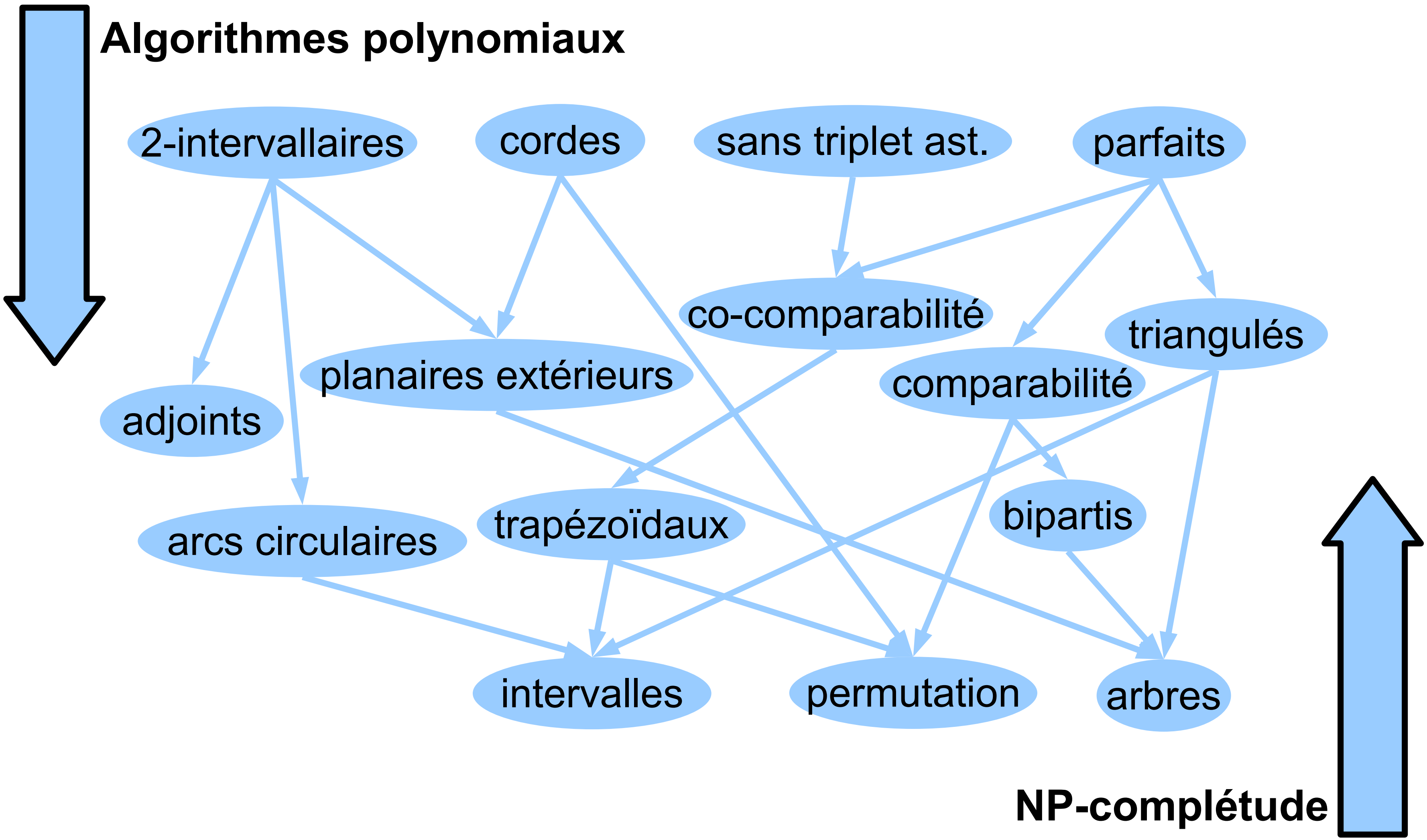


La **classe** de graphes d'intervalles **est incluse** dans celle des graphes trapézoïdaux.

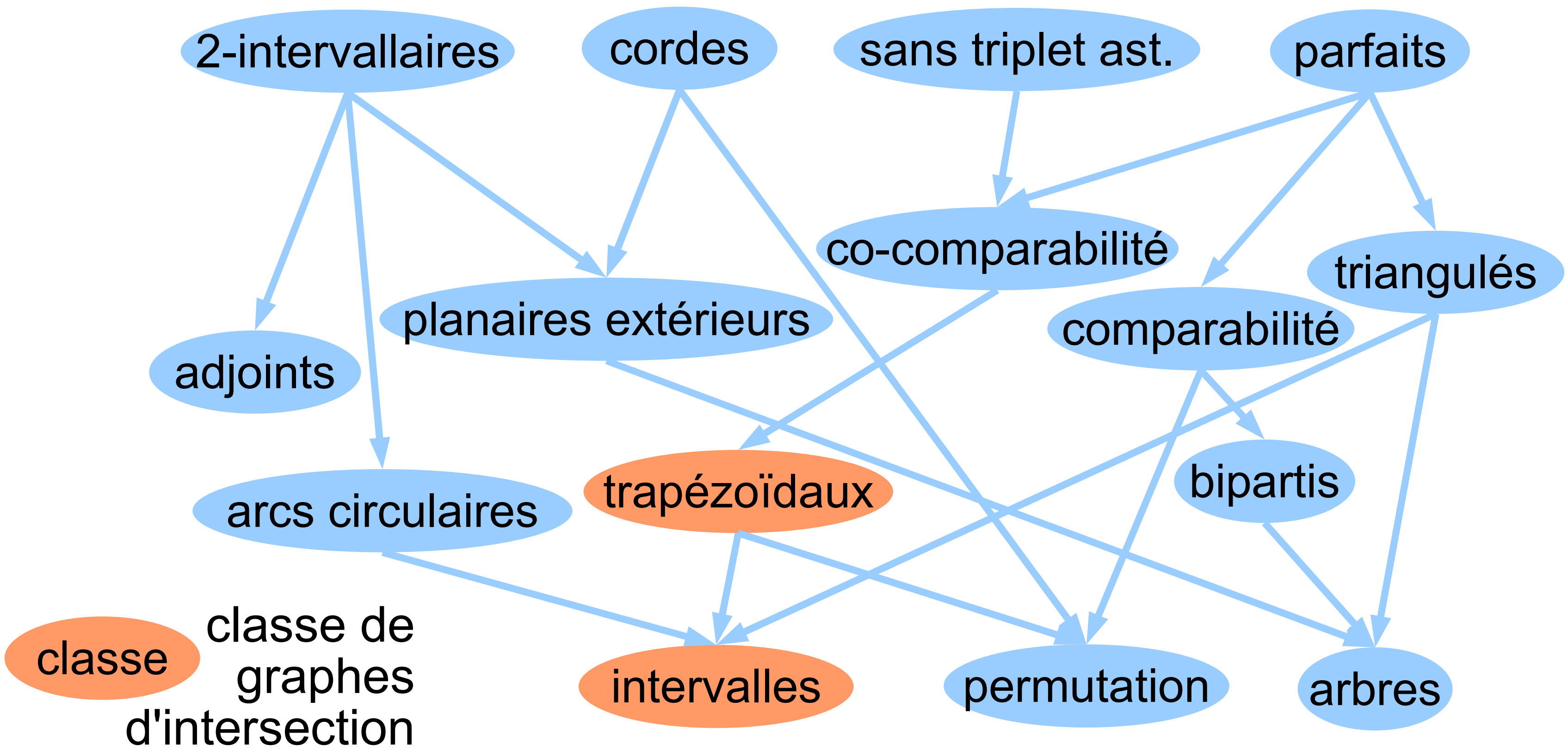
Graphe d'inclusion des classes de graphes



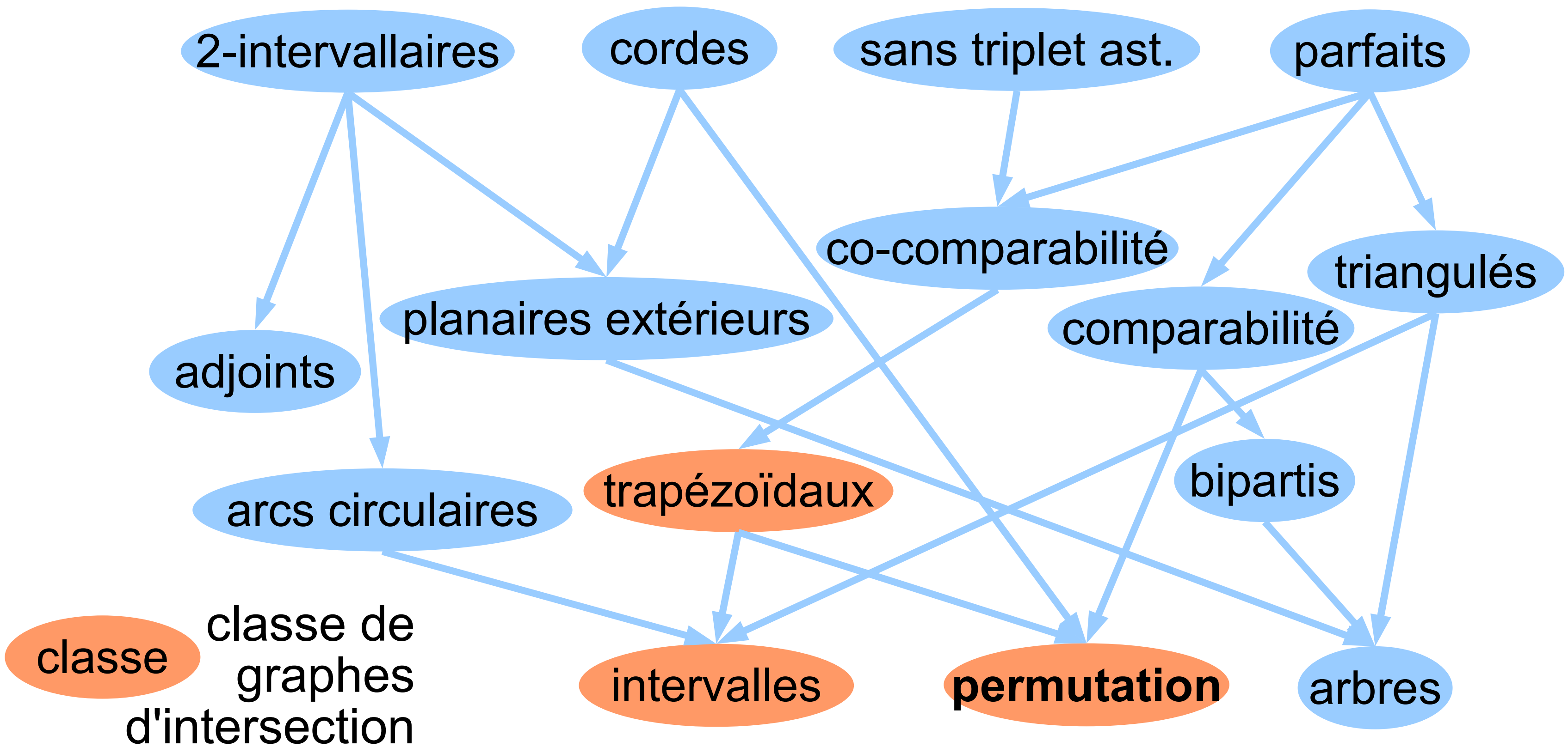
Graphe d'inclusion des classes de graphes



Graphe d'inclusion des classes de graphes

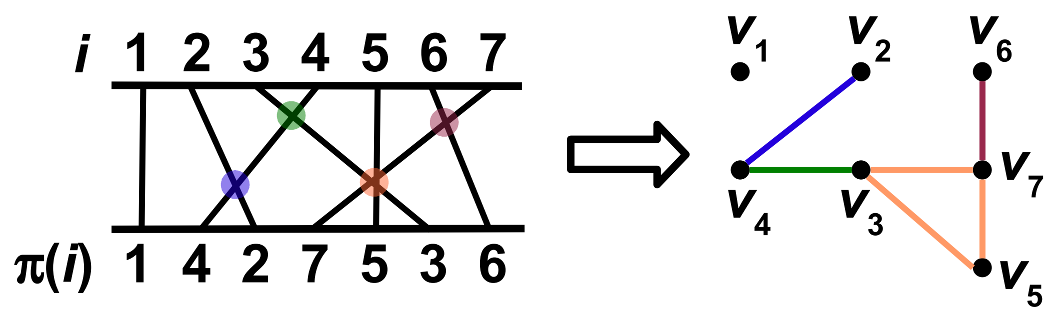


Graphe d'inclusion des classes de graphes

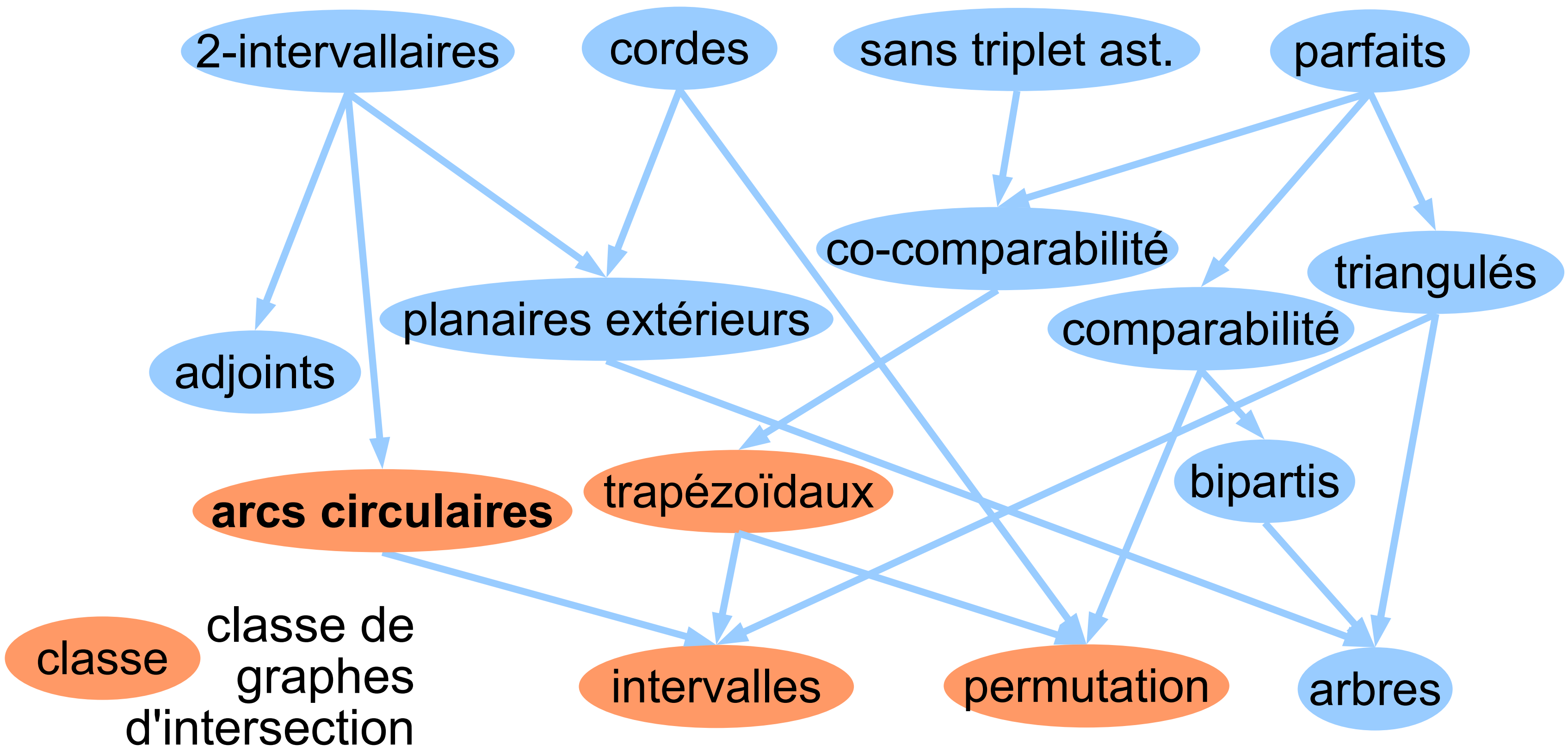


Graphe de **permutation** : graphe d'intersection des **segments (*k*,*k*)**.

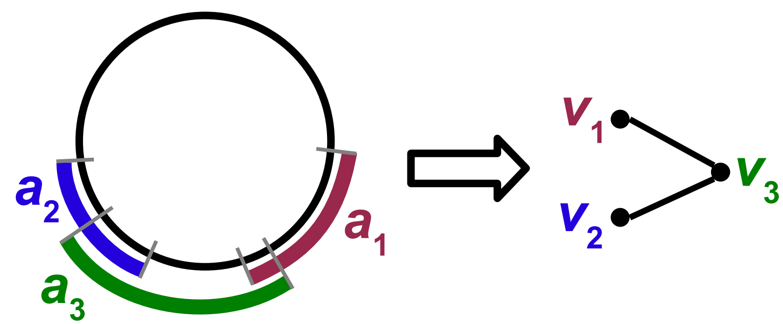
ligne des *i* ligne des $\pi(i)$



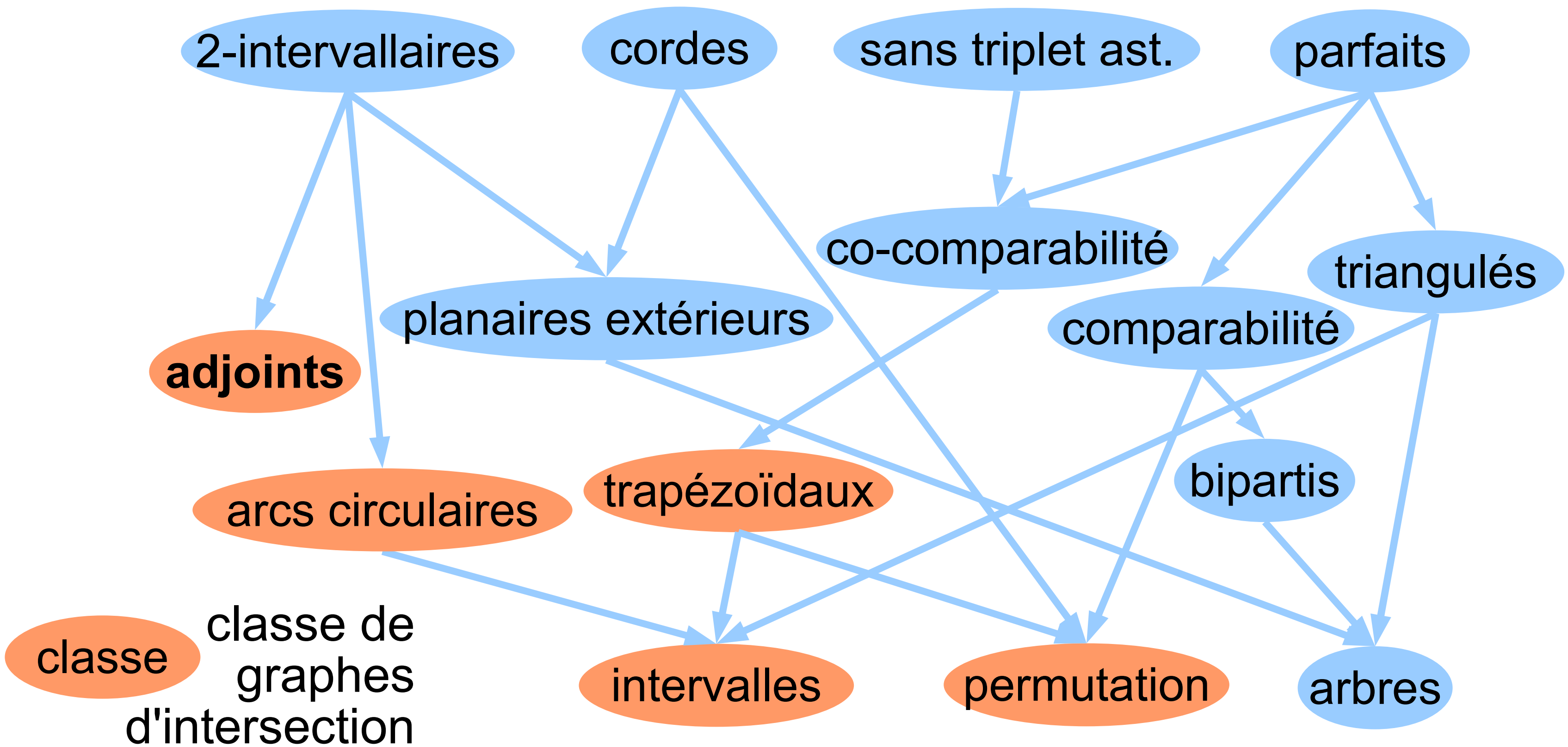
Graphe d'inclusion des classes de graphes



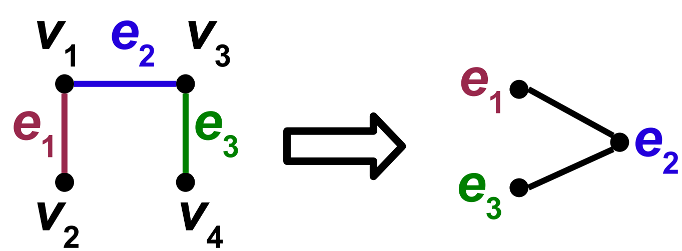
Graphe d'**arcs circulaires** : graphe d'intersection d'**arcs d'un cercle**.



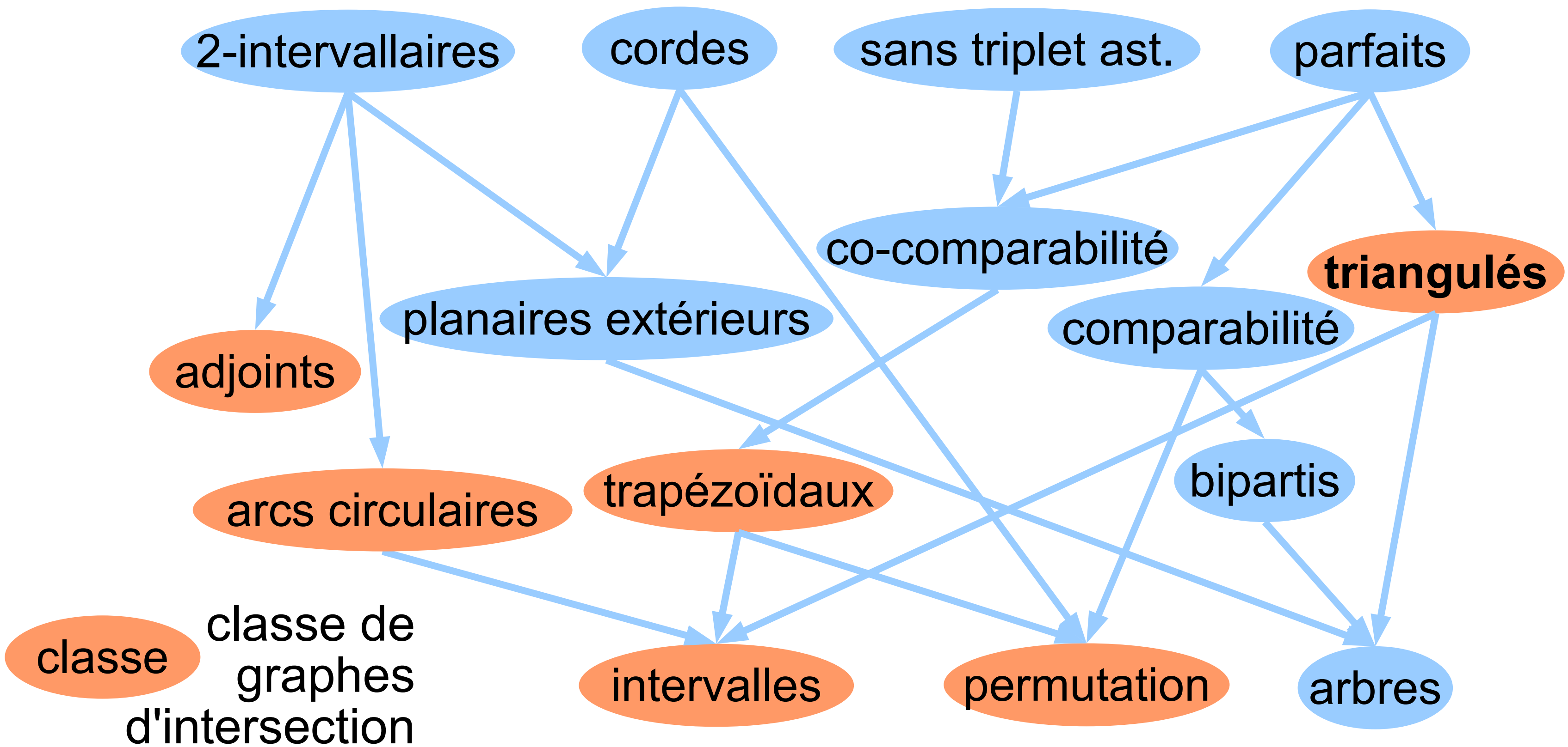
Graphe d'inclusion des classes de graphes



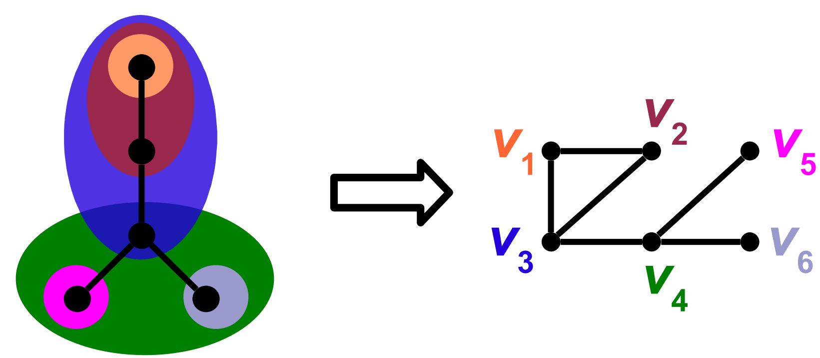
Graphe **adjoint** :
graphe d'intersection des **arêtes d'un graphe**.



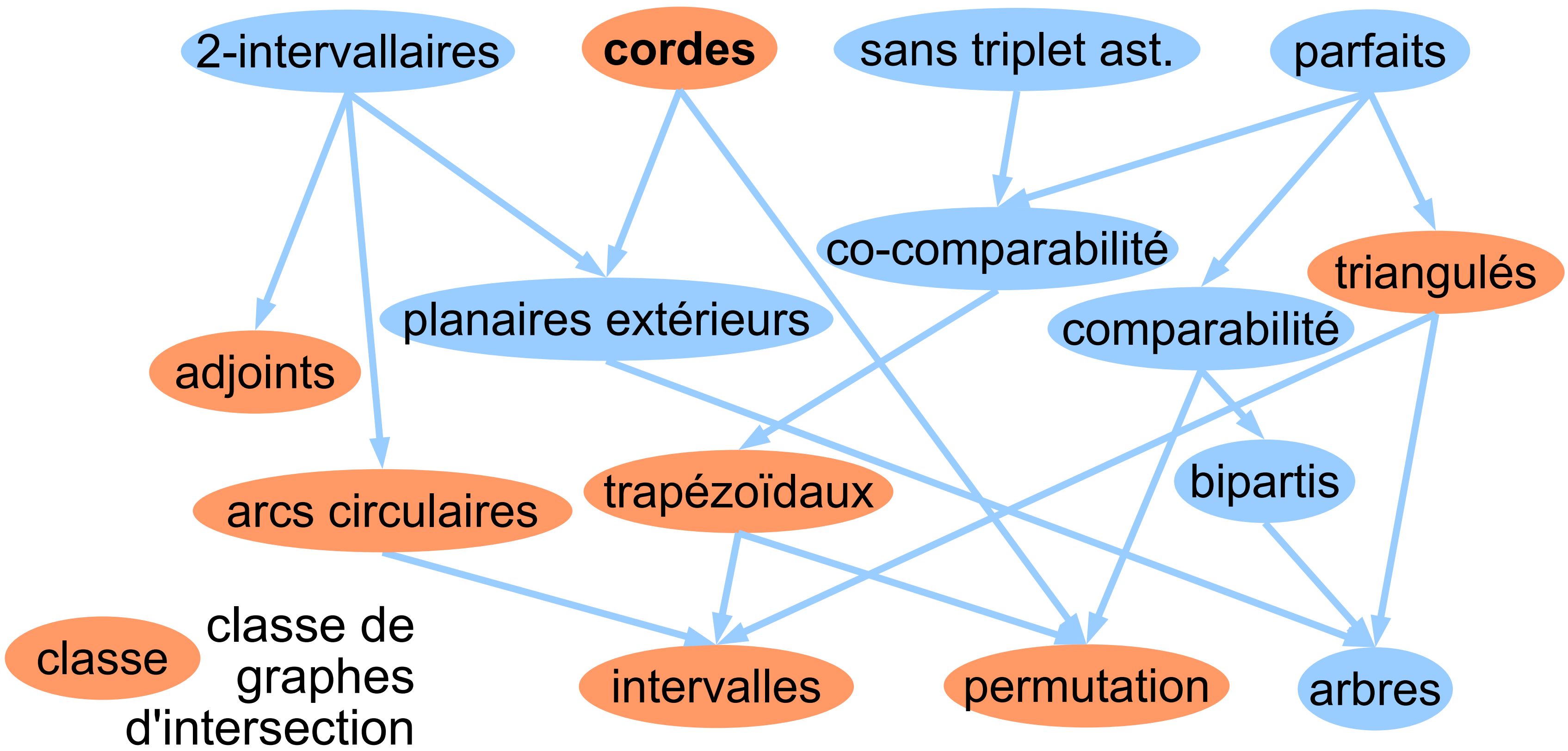
Graphe d'inclusion des classes de graphes



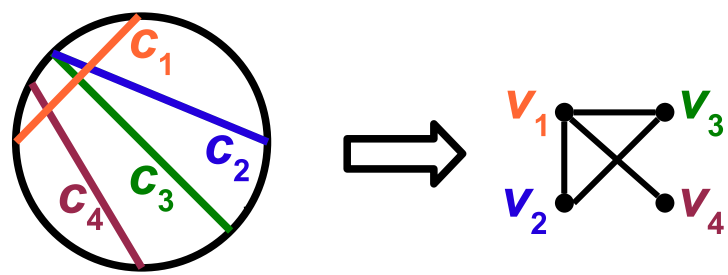
Graphe **triangulé** : graphe d'intersection d'une famille de **sous-arbres d'un arbre**.



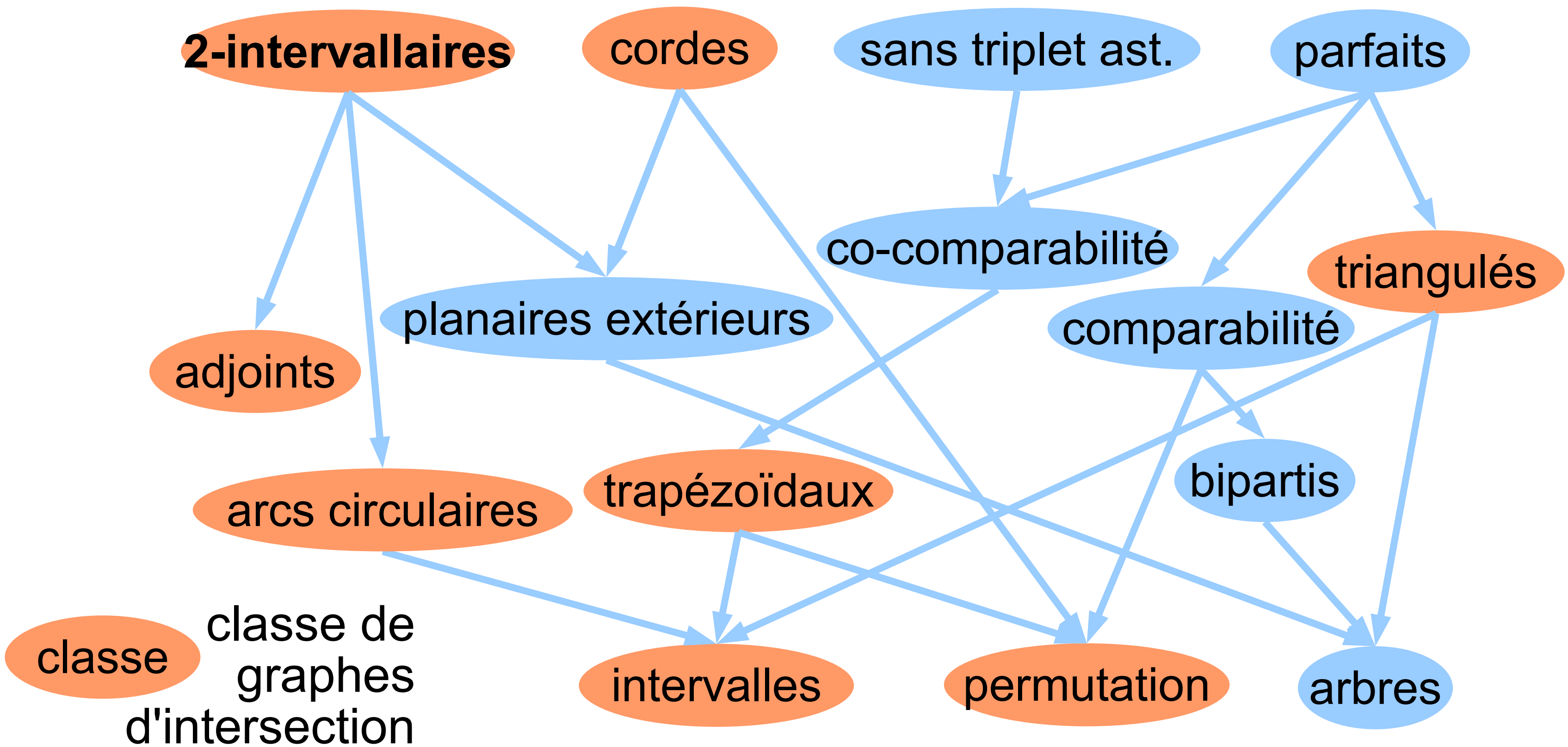
Graphe d'inclusion des classes de graphes



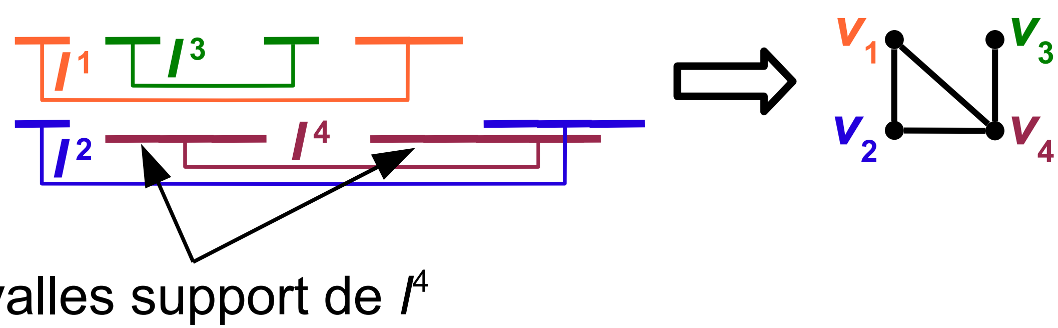
Graphe **de cordes** :
graphe d'intersection des
cordes d'un cercle.



Graphe d'inclusion des classes de graphes



The star of the show, graphe **2-intervallaire** : graphe d'intersection d'unions de deux intervalles.



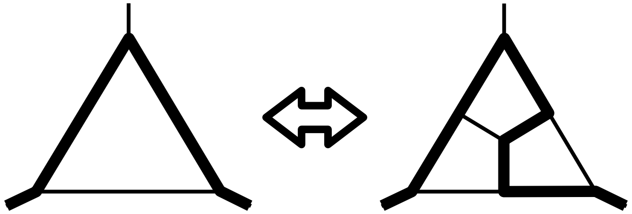
Reconnaissance des graphes 2-intervallaires

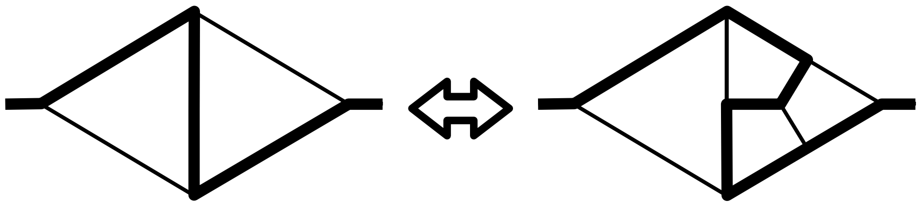
Déterminer, pour un graphe G quelconque, s'il est 2-intervallaire, est **NP-complet** [West,Shmoys,1984]

Idée de la preuve :

Par réduction du problème de **Cycle Hamiltonien** (*il existe un chemin dans le graphe fourni en entrée passant une seule fois par tous les sommets et revenant au sommet d'origine sans emprunter deux fois la même arête*) **sur les graphes 3-réguliers** (*tous les sommets ont trois voisins*), qui est **NP-complet** [Garey,Johnson,Tarjan,1976].

West et Shmoys réduisent d'abord ce problème à **Cycle Hamiltonien sur les graphes 3-réguliers sans triangle**.



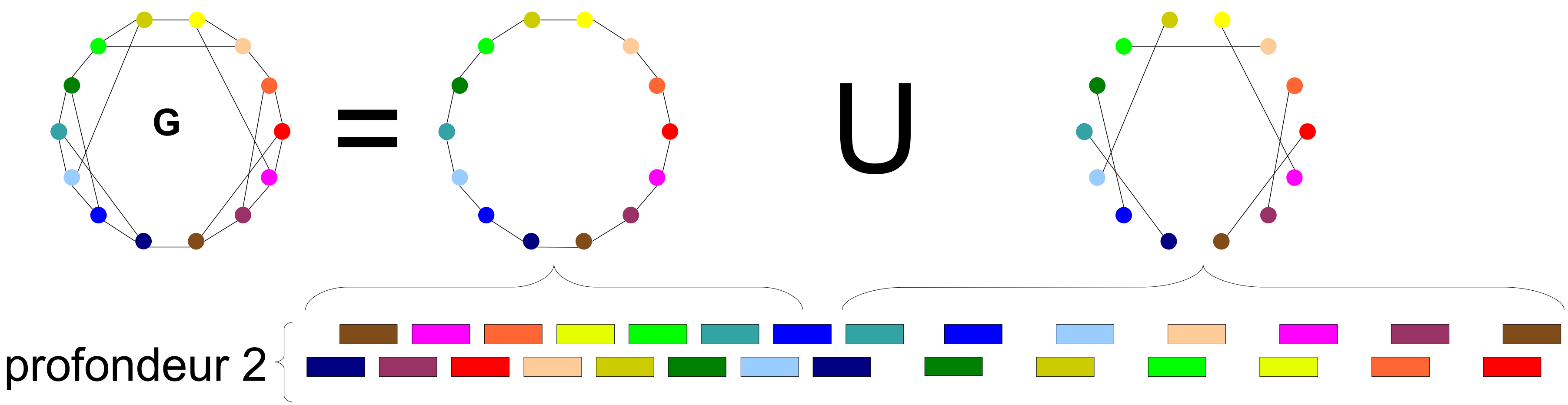


Reconnaissance des graphes 2-intervallaires

Idée de la preuve que reconnaître les 2-inter. est NP-complet :

Puis, pour tout **graphe *G* 3-régulier sans triangle**, ils construisent en temps polynomial un graphe ***G′* qui est 2-intervallaire** ssi ***G* admet un cycle hamiltonien**.

L'idée : si *G* a un cycle hamiltonien, ajouter des gadgets sur *G* pour obtenir *G′* dont toute réalisation 2-intervallaire sera une *H*-représentation :

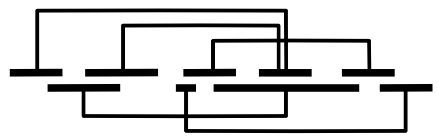


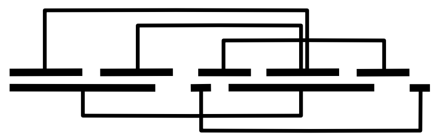
une *H*-représentation de *G*

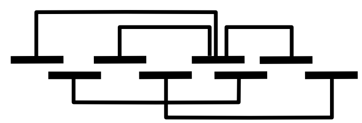
Graphes 2-intervallaires et restrictions

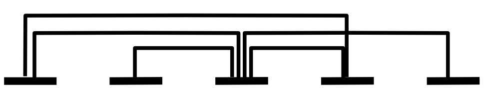
Support d'un ensemble de 2-intervalles :

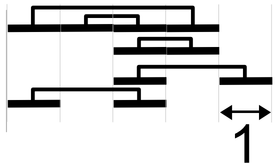
ensemble des **intervalles support** des 2-intervalles.

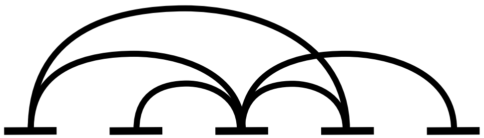
Support sans restriction : 

Support **équilibré :** 

Support **unitaire :** 

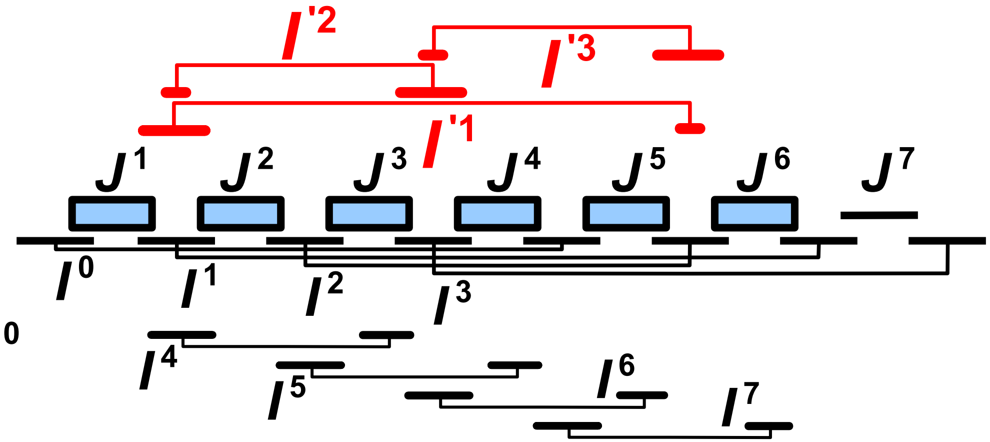
Support **disjoint :** 

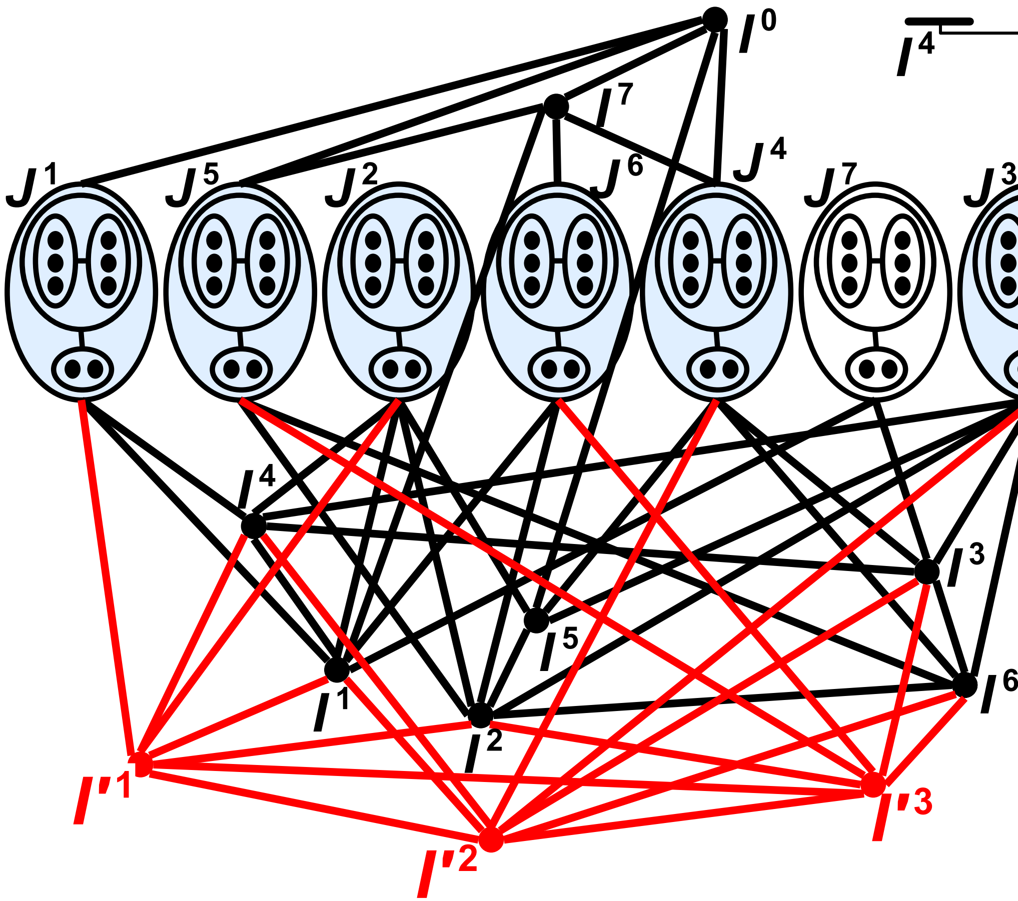
graphes (1,1)-intervallaires : 

séquences arc-annotées : 

Classe des 2-intervallaires équilibrés

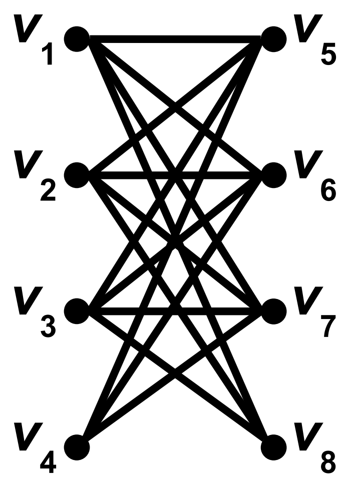
Graphe 2-intervallaire non équilibrable, et une réalisation en 2-intervalles

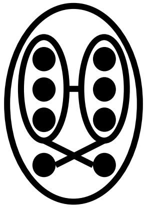




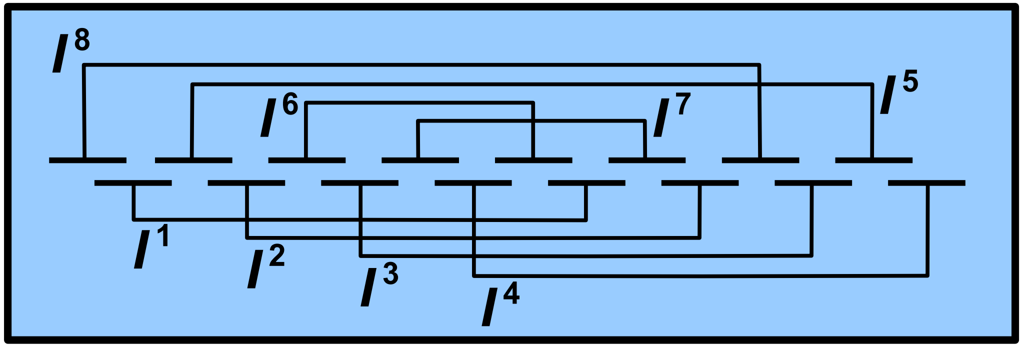
La classe des 2-intervallaires équilibrés est **strictement incluse** dans la classe des graphes 2-intervallaires.

Les gadgets utilisés



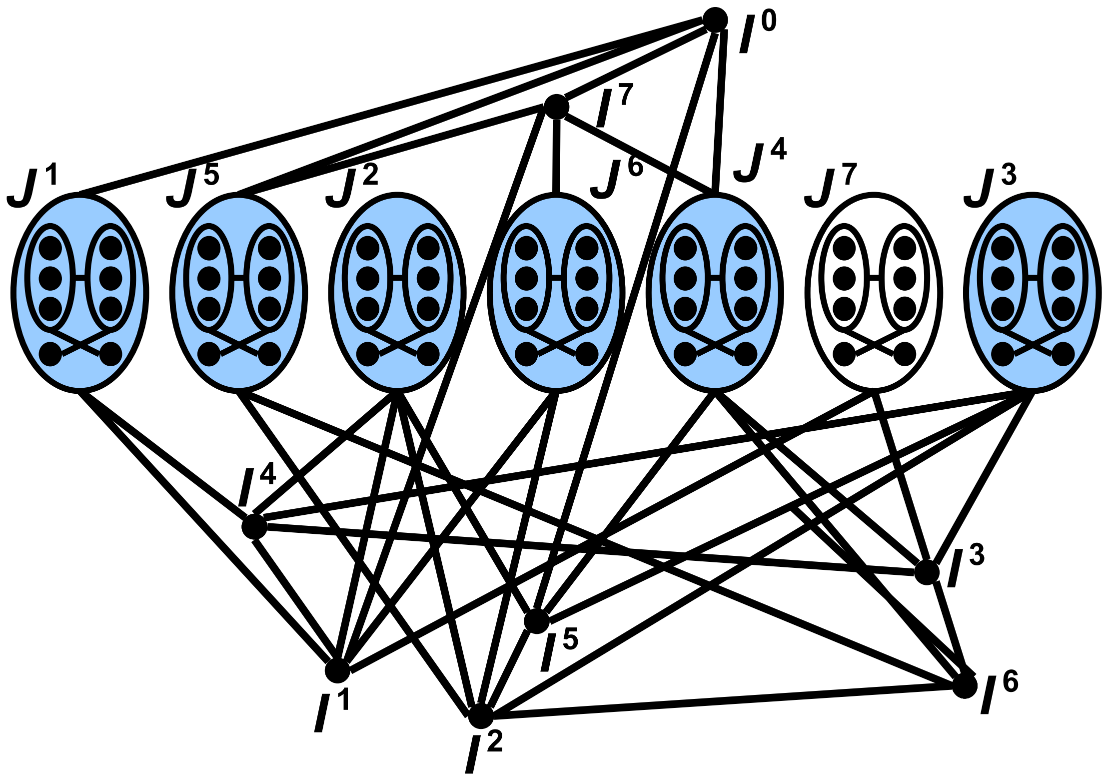


Toute réalisation de ce graphe 2-intervallaire est **contiguë** (et le graphe est 2-intervallaire unitaire)

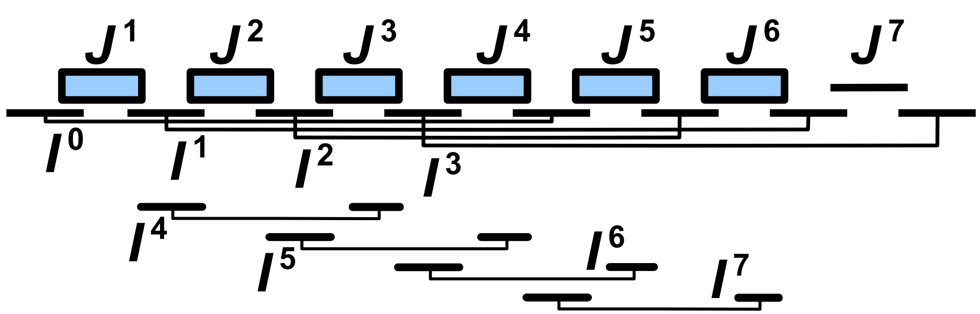


Ces ensembles de 2-intervalles vont jouer le rôle de « **blocs** » de 2-intervalles.

Les gadgets utilisés

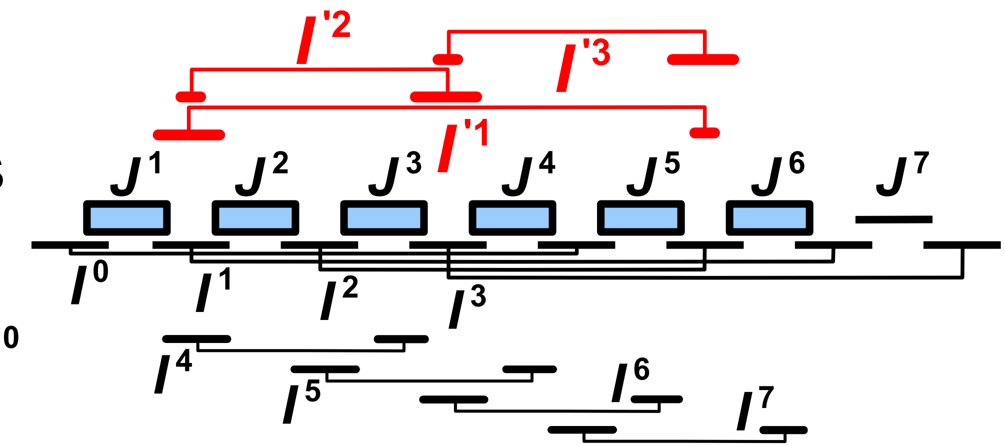


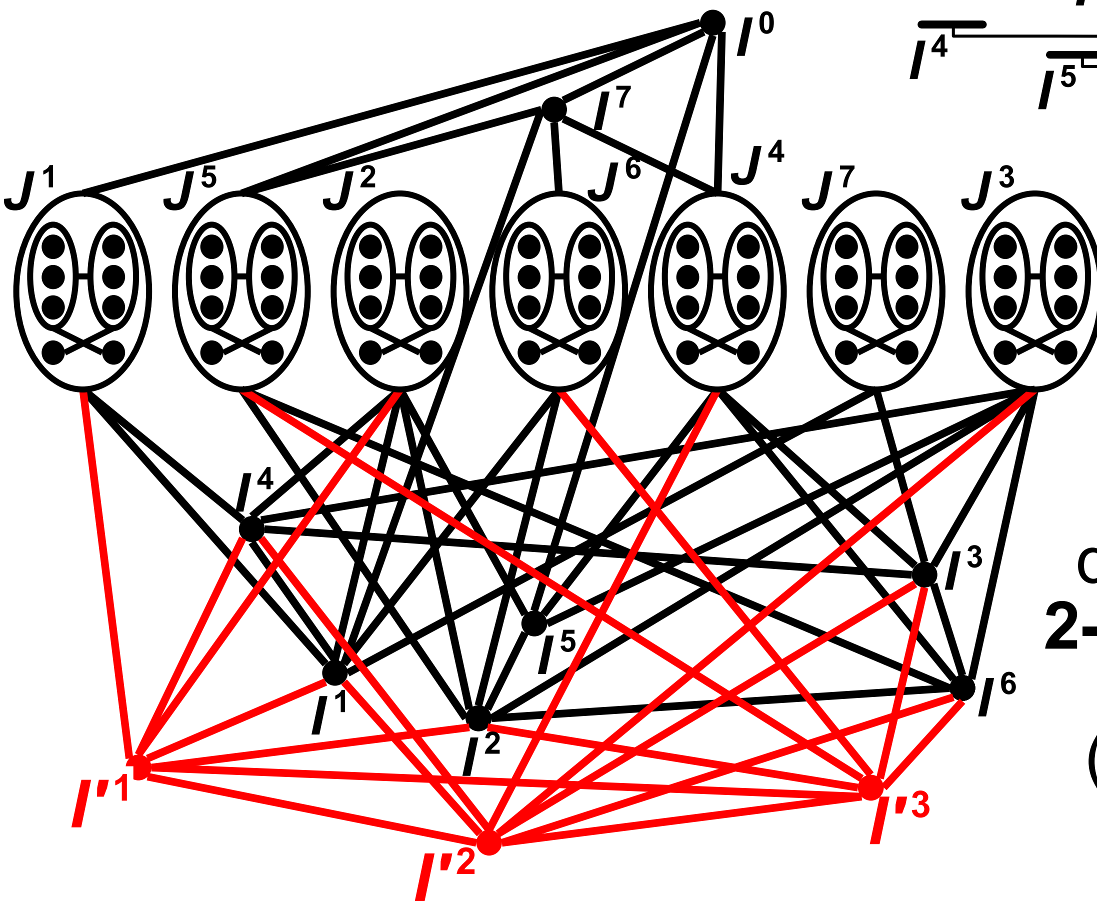
Toute réalisation de ce graphe impose l'ordre des «blocs » J_i



Classe des 2-intervallaires équilibrés

Graphe 2-intervallaire non équilibrable, et une réalisation en 2-intervalles





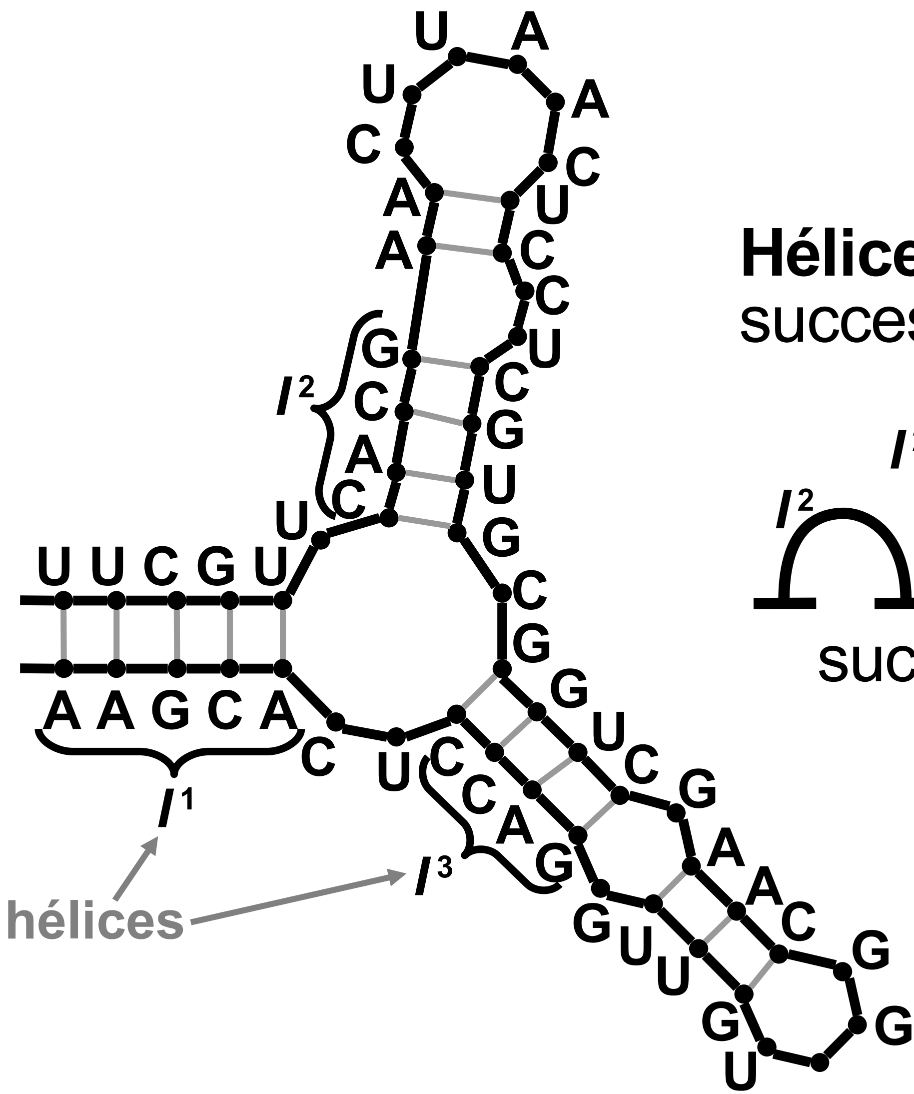
Mais la reconnaissance de la classe des graphes **2-intervallaires équilibrés** reste **NP-complète** ! (adaptation de la preuve de West et Shmoys)

Motivations

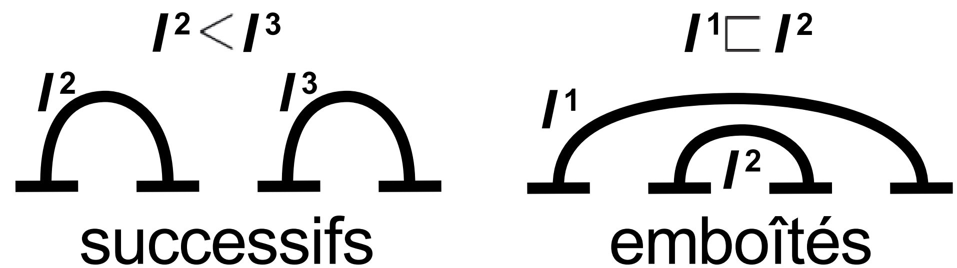
Un **2-intervalle** modélise :

- une tâche coupée en 2 dans un problème d'**ordonnancement**
- deux portions similaires ou complémentaires inversées d'**ADN**
- deux portions complémentaires et inversées d'**ARN**
- deux extraits « mis en relation » dans une **partition musicale**

Motivations : cas de l'ARN

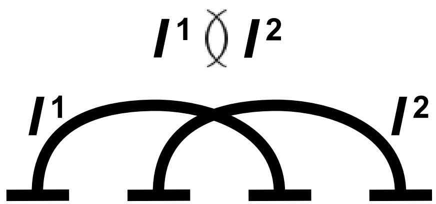


Hélices : appariements de portions successives ou emboîtées d'ARN.

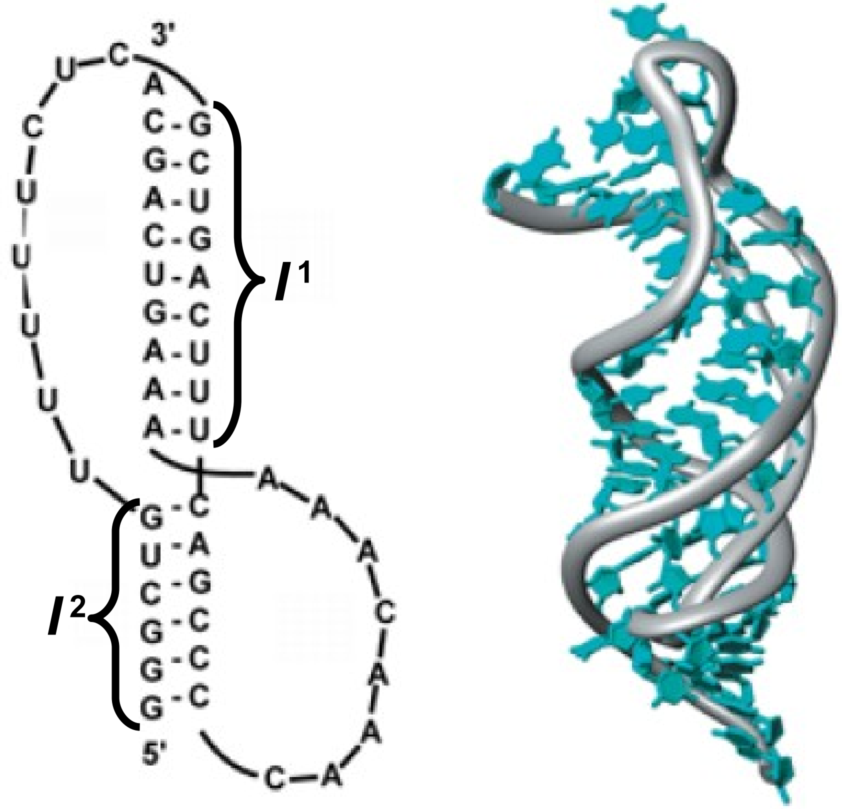


Motivations : cas de l'ARN

Pseudo-noeud :
appariement de nucléotides entrelacés.



croisés



Extrémité 5' du composant ARN de la télomérase humaine

D'après D.W. Staple, S.E. Butcher, *Pseudoknots: RNA structures with Diverse Functions* (PloS Biology 2005 3:6 p.957)

Vers la théorie des graphes : stable max

Trouver les **hélices** d'un ARN sans pseudo-noeud donné comme une suite de nucléotides.

$\Updownarrow$

Trouver le plus **grand sous-ensemble** de 2-intervalles **disjoints**, uniquement **successifs ou emboîtés**, dans un ensemble de 2-intervalles.

$\Updownarrow$

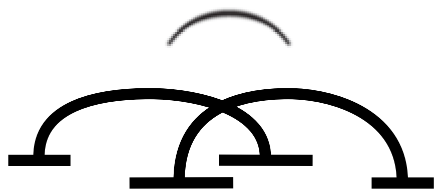
Trouver le **stable maximum** du graphe tel que :

- les **sommets** correspondent aux **2-intervalles**,
- une **arête** joint deux 2-intervalles qui **s'intersectent**,
- une **arête** joint deux 2-intervalles **croisés.**

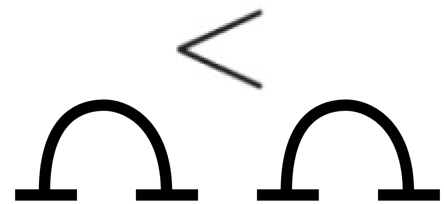
Graphes 2-intervallaires et variantes

16 variantes de la classe des graphes de 2-intervalles :

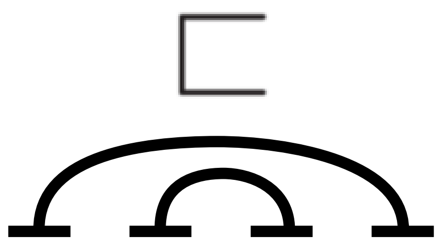
- les **sommets** correspondent aux **2-intervalles**
- une **arête** joint deux 2-intervalles qui sont :



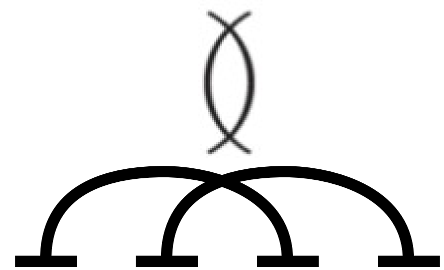
intersectants



successifs



emboîtés



croisés

8 classes à caractériser (et leur complémentaire)

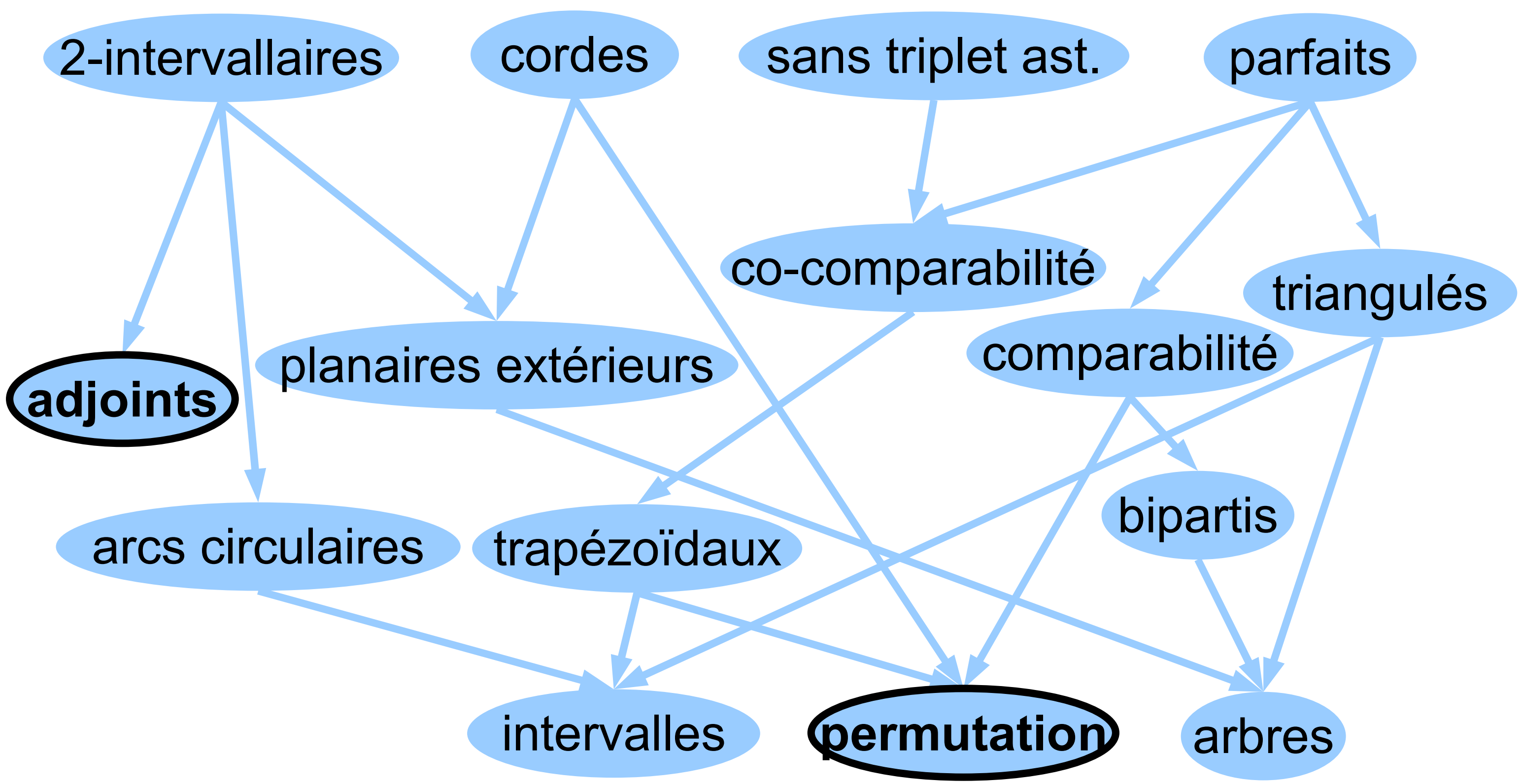
Variantes des graphes 2-intervallaires

Support :	sans restriction	disjoint
$\{\frown, \sqsubset, <, \between\}$	clique	clique
$\{\frown\}$	2-intervallaires	(1,1)-intervallaires
$\{\frown, \sqsubset\}$	Classes inconnues, stable max NP-complet	Classe inconnue, stable max inconnu
$\{\frown, <\}$		Classe inconnue, stable max polynomial
$\{\frown, \between\}$	Inclusions utiles dans des classes de graphes	cordes
$\{\frown, \sqsubset, <\}$		$\overline{\text{cordes}}$
$\{\frown, \sqsubset, \between\}$	intervalles	intervalles
$\{\frown, <, \between\}$	trapézoïdaux	permutation

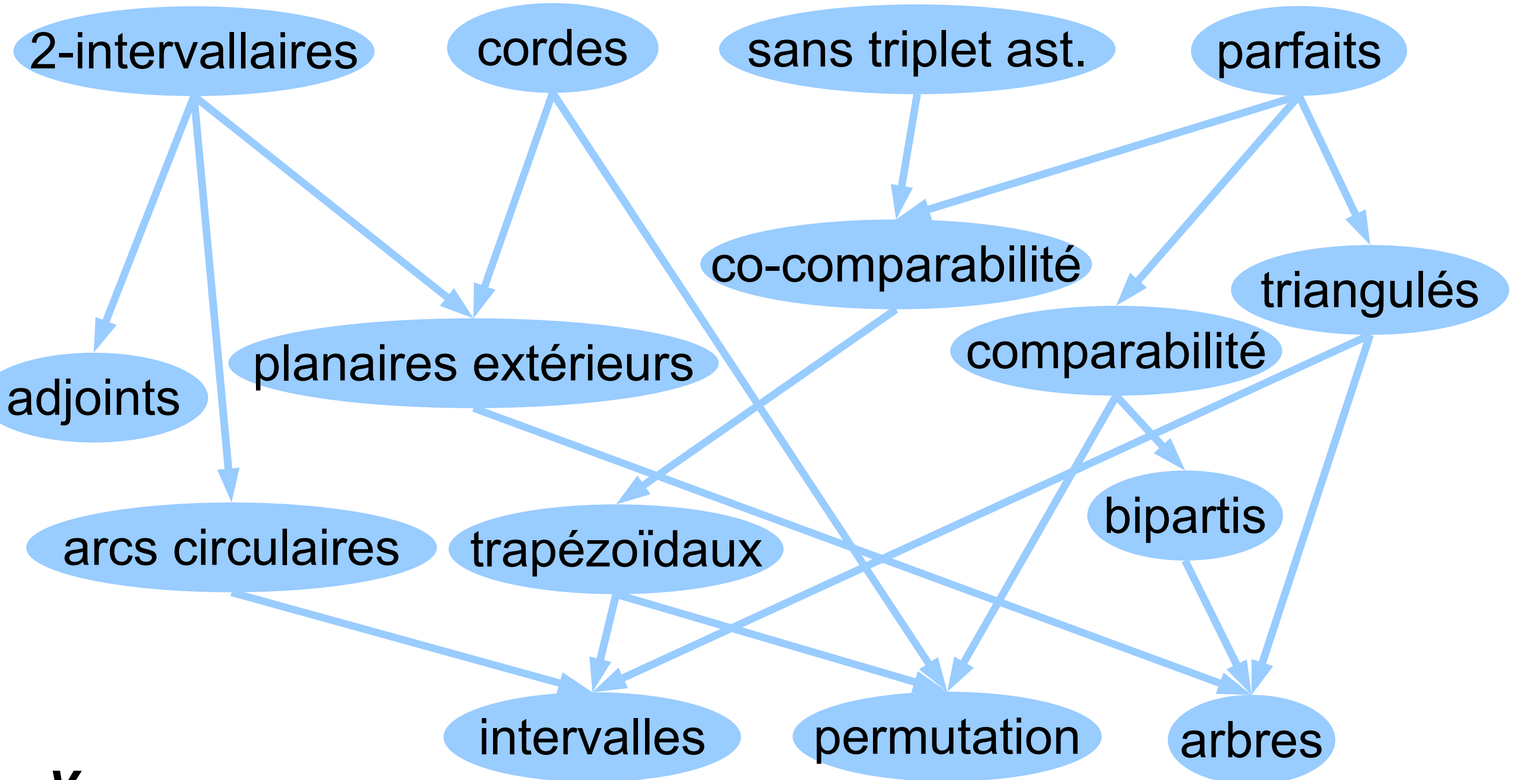
Classe des $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires

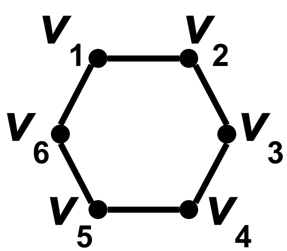
Un graphe $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaire est l'union

d'un **graphe adjoint** et d'un **graphe de permutation**.

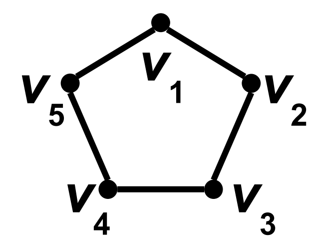


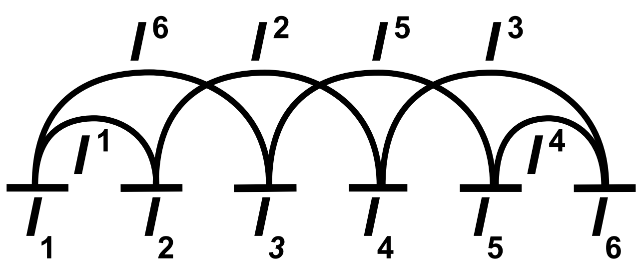
Classe des $\{\frown,\sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires

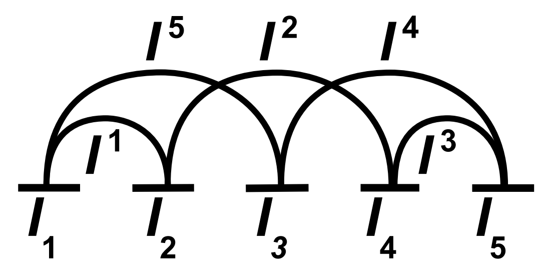




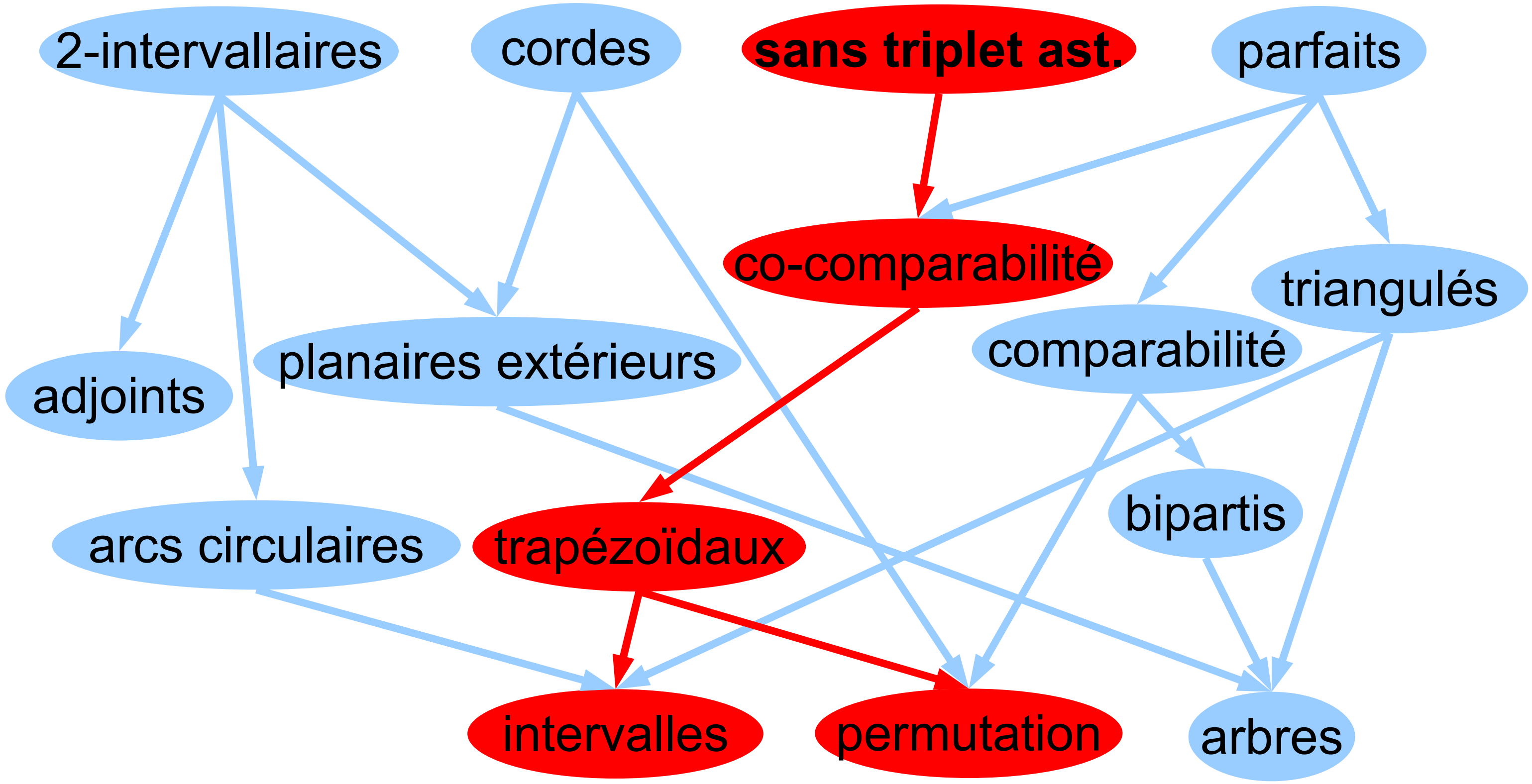
Les **cycles** sont des graphes $\{\frown,\sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires.

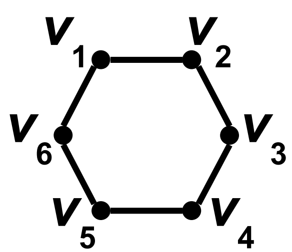


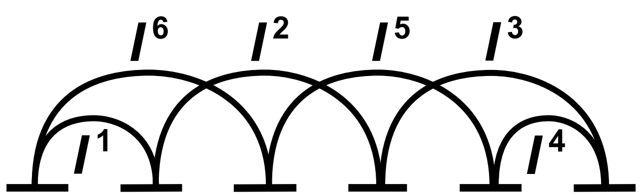




Classe des $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires



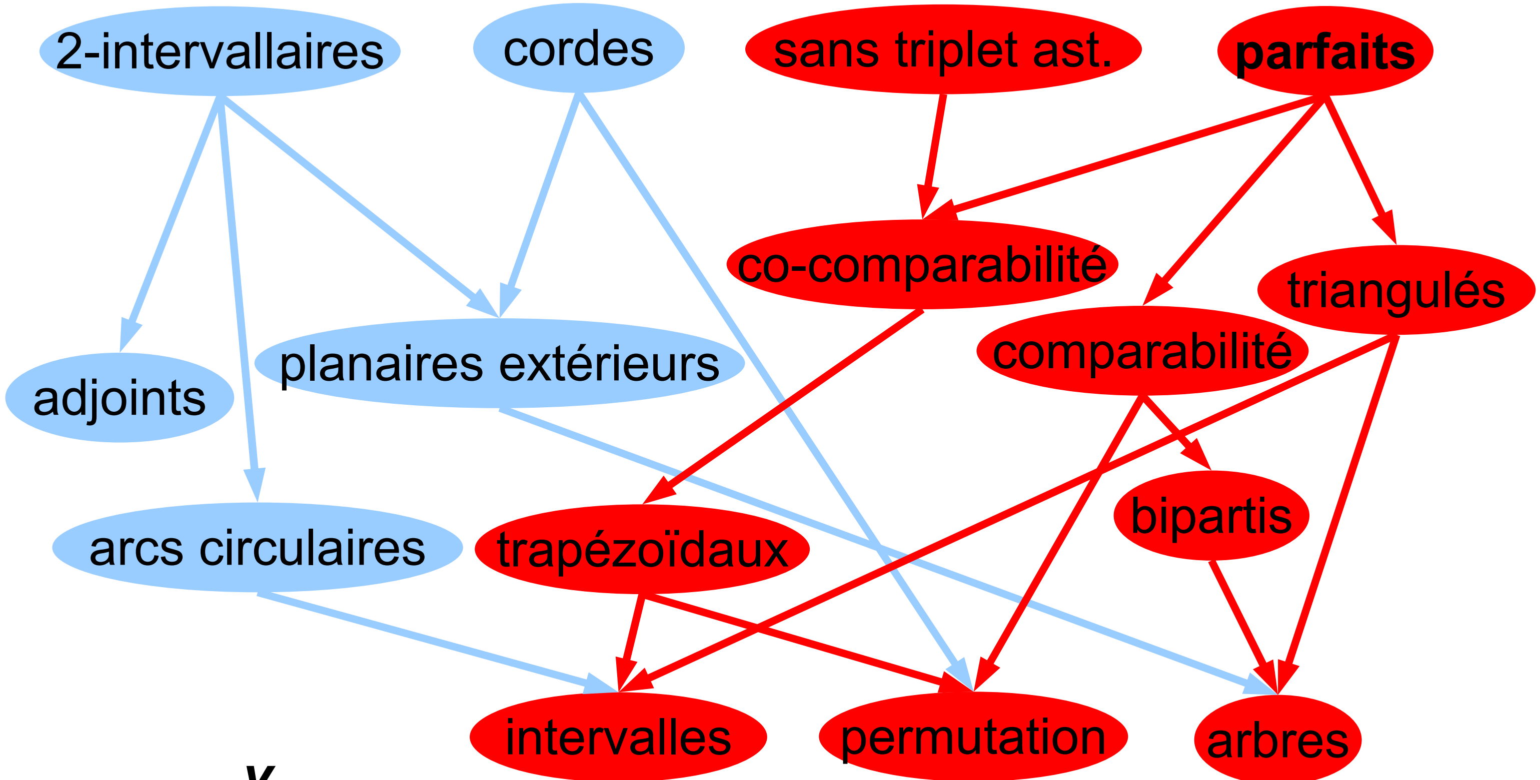




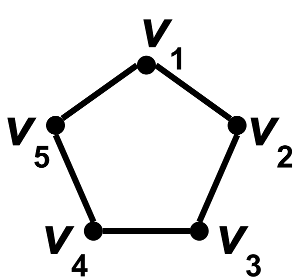
classe : classe de graphes ne contenant pas celle des $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires

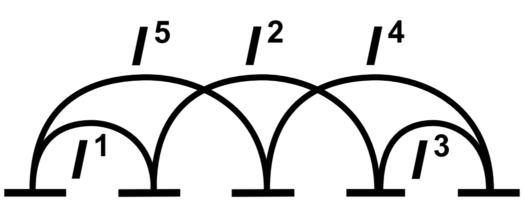
Les **cycles** sont des graphes $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires.

Classe des $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires



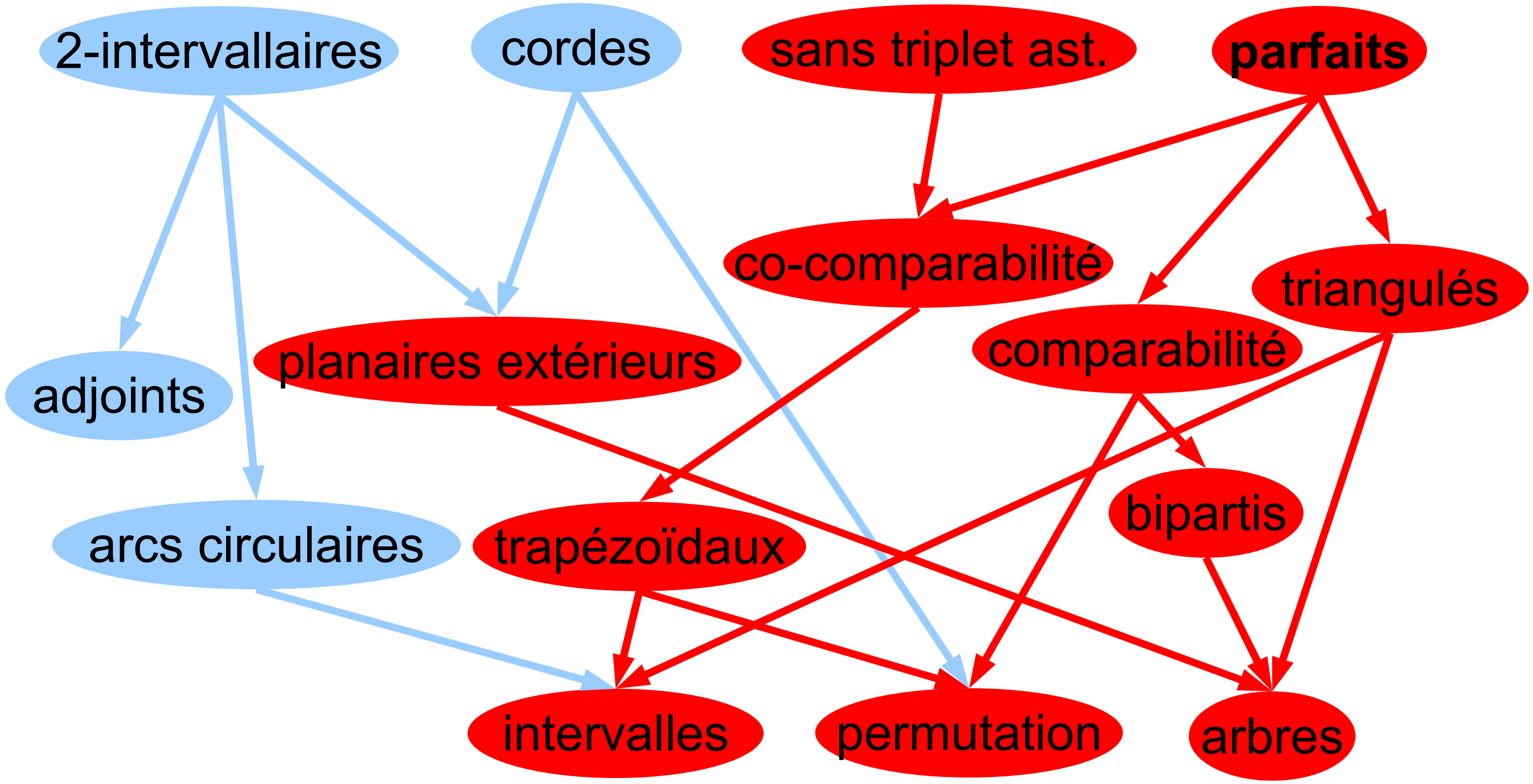
classe de graphes ne contenant pas celle des $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires





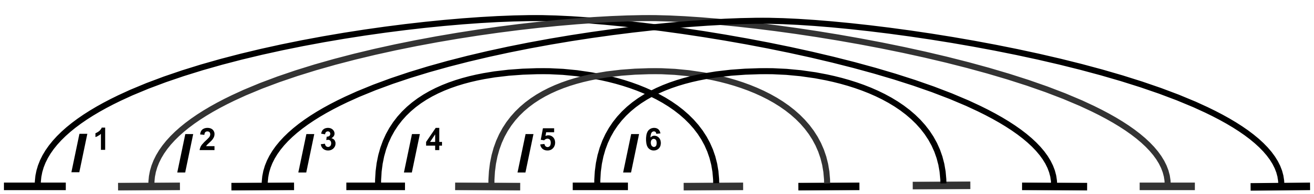
Les **cycles** sont des graphes $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires.

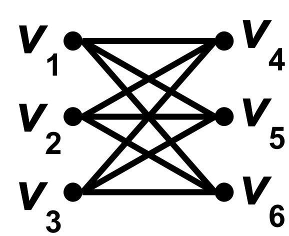
Classe des $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires



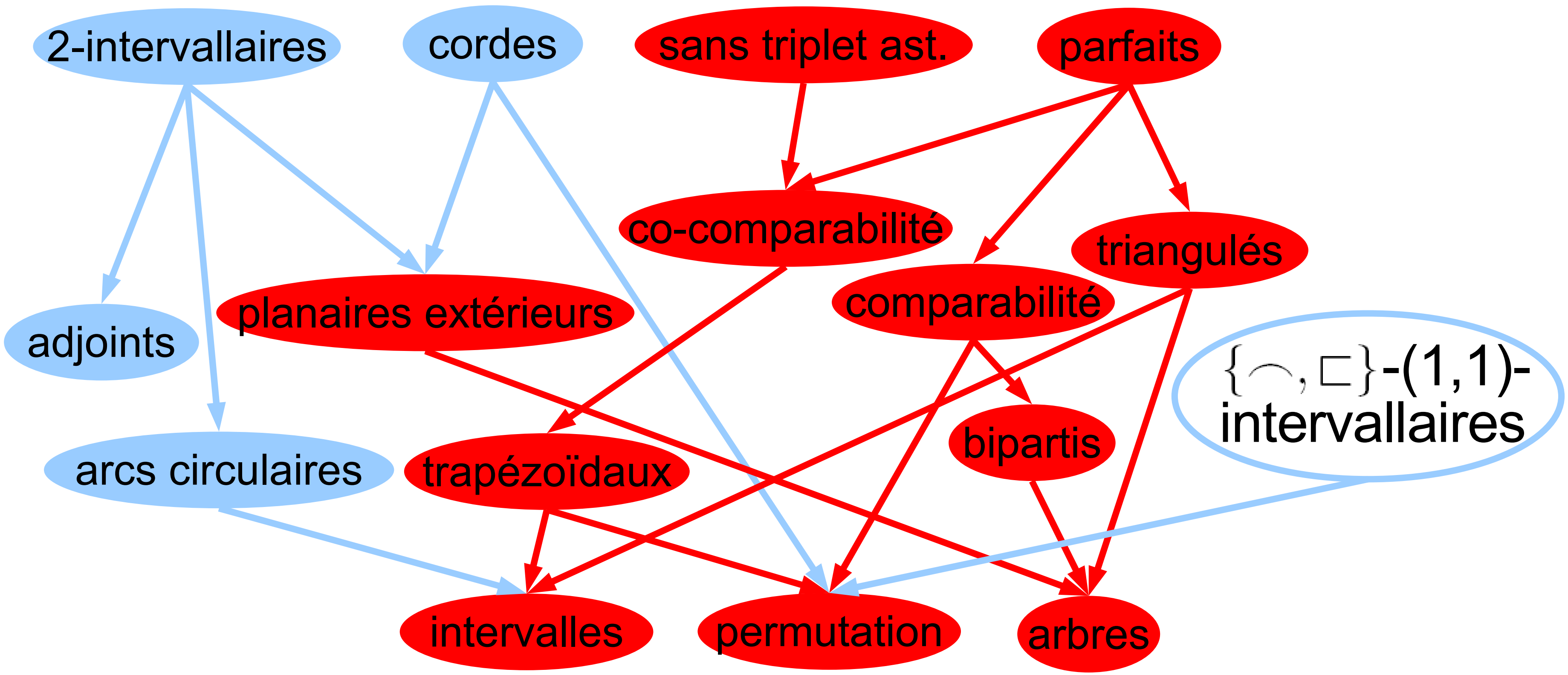
Les **bipartis complets** sont des graphes $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires.

classe : classe de graphes ne contenant pas celle des $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires





Classe des $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires



classe — classe de graphes ne contenant pas celle des $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires

Les **graphes de permutation** sont des graphes $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires.

Classe des $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires

Trouver des **graphes interdits** :

- Y en a-t-il, de quelle taille ?
- Peut-on en exhiber ?

Classe des $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires

Trouver des **graphes interdits** :

- Y en a-t-il, de quelle taille ?
- Peut-on en exhiber ?

Tous les graphes
à 5 noeuds ou moins sont
$\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires.

Classe des $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires

Trouver des **graphes interdits** :

- Y en a-t-il, de quelle taille ?

Majorer le nombre de graphes $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires à *n* noeuds.

Classe des $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires

Trouver des **graphes interdits** :

- Y en a-t-il, de quelle taille ?

  ↳ Majorer le nombre de graphes $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires à *n* noeuds.

  ↳ par le nombre de séquences arc-annotées à *n* arcs.

Enumération des séquences arc-annotées

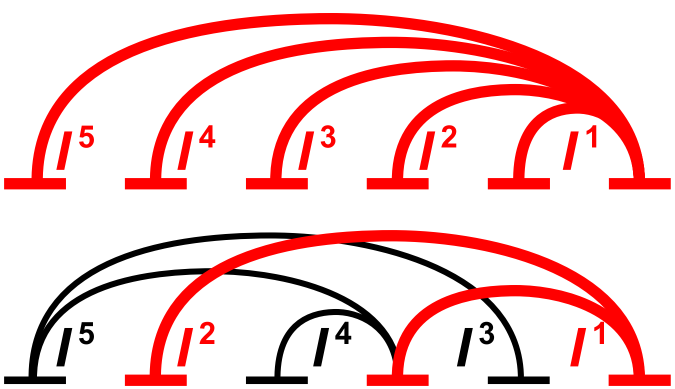
Trouver des **graphes interdits** :

- Y en a-t-il, de quelle taille ?

⇒ Majorer le nombre de graphes $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires à *n* noeuds.

⇒ par le nombre de séquences arc-annotées à *n* arcs.

Nombre de séquences arc-annotées à *n* arcs et *e* extrémités (récursivement par rapport aux extrémités)



$$AA(n,e) = 1_{e=n+1} + \sum_{x=1}^{e-1} \sum_{y=0}^{x} AA(n-x, e-1-y) \binom{e-1}{y} \binom{e-1-y}{x-y}$$

Enumération des séquences arc-annotées

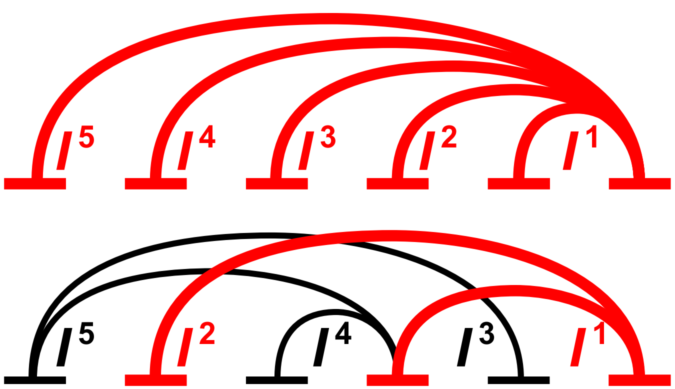
Trouver des **graphes interdits** :

- Y en a-t-il, de quelle taille ?

  ⇒ Majorer le nombre de graphes $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires à *n* noeuds.

  ⇒ par le nombre de séquences arc-annotées à *n* arcs.

Nombre de séquences arc-annotées à *n* arcs et *e* extrémités (récursivement par rapport aux extrémités)



$$AA(n,e) = 1_{e=n+1} + \sum_{x=1}^{e-1} \sum_{y=0}^{x} AA(n-x, e-1-y) \binom{e-1}{y} \binom{e-1-y}{x-y}$$

$$AA(n) = \sum_{e=1}^{2n} AA(n,e)$$

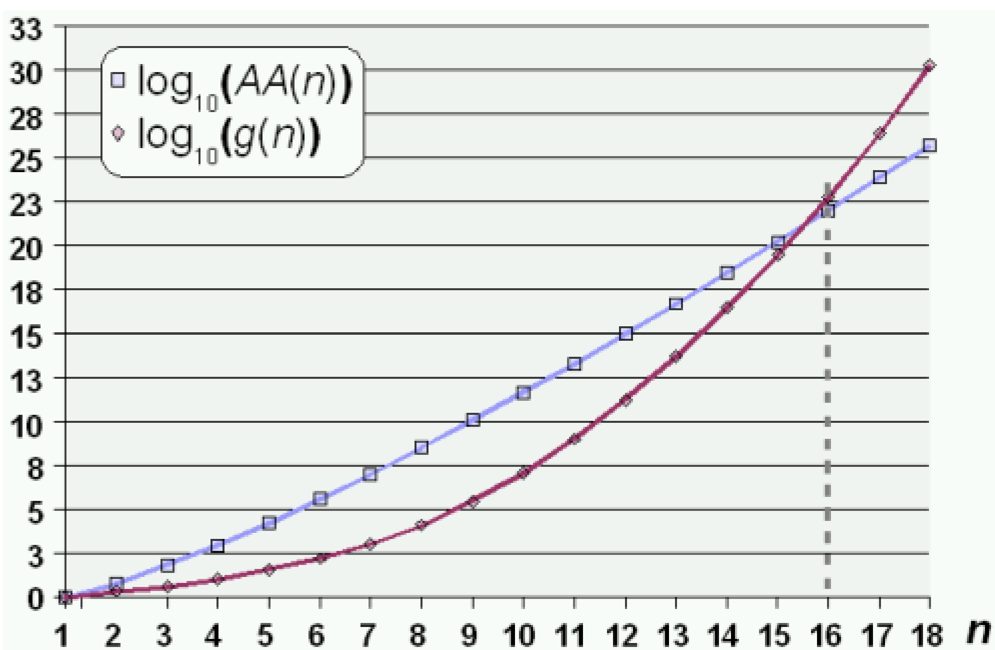
Classe des $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires

Trouver des **graphes interdits** :

- Y en a-t-il, de quelle taille ?

⮡ Majorer le nombre de graphes $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires à n noeuds.

⮡ par le nombre de séquences arc-annotées à n arcs.

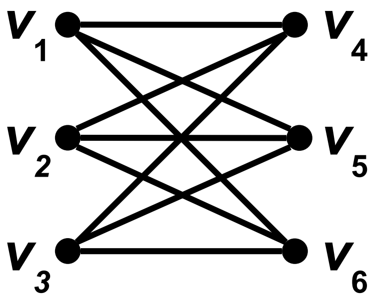


Il existe un graphe à 16 noeuds qui n'est pas $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaire.

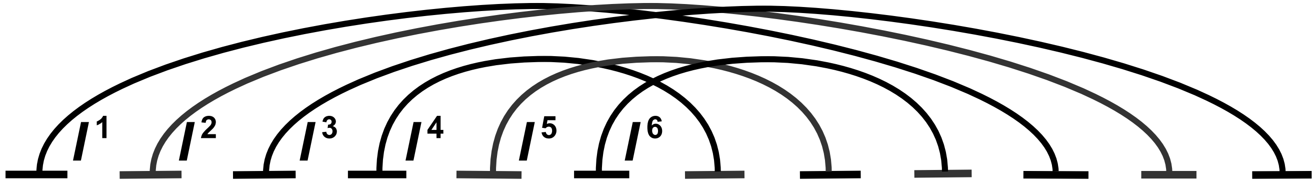
Classe des $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires

Trouver des **graphes interdits** :

- Y en a-t-il, de quelle taille ? *Il en existe, de taille 16.*
- Peut-on en exhiber ? *On en exhibe un de taille 9 :*



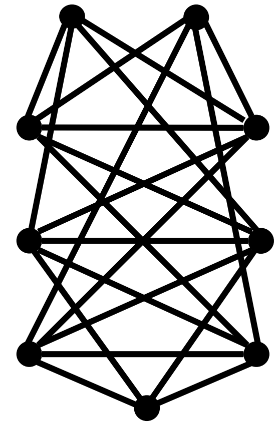
a 40 réalisations en séquence arc-annotée.



Classe des $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires

Trouver des **graphes interdits** :

- Y en a-t-il, de quelle taille ? *Il en existe, de taille 16.*
- Peut-on en exhiber ? *On en exhibe un de taille 9 :*



n'a aucune réalisation en séquence arc-annotée.

Ce graphe **n'est pas** $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaire.

Conclusion

- De nouveaux résultats :
  - l'inclusion stricte de la classe des graphes 2-intervallaires équilibrés dans celle des 2-intervallaires, mais la reconnaissance de cette classe est encore NP-difficile.
  - quelques éléments de caractérisation de la classe des graphes $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires.

- Des problèmes de complexité qui restent ouverts.
  - piste pour un algorithme polynomial pour le problème du stable max : caractérisation en partant du diagramme de Hasse.
  - complexité de la reconnaissance des (k,k)-intervallaires : toujours ouvert.