Séminaire VAG - LIRMM

Graphes 2-intervallaires, classes voisines et sous-classes

Philippe Gambette
en collaboration avec
Stéphane Vialette et Michel Habib

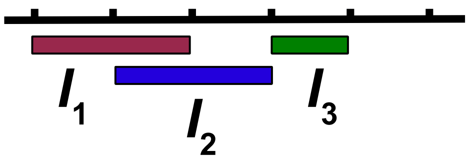
Plan

- Introduction sur les graphes 2-intervallaires
- Motivations pour l'étude de cette classe
- Structure secondaire de l'ARN et stable max
- Variantes des 2-intervallaires
- Graphes 2-intervallaires équilibrés
- Graphes 2-intervallaires unitaires

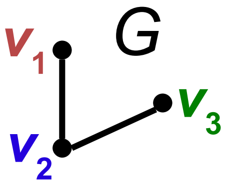
Les graphes d'intervalles

$\mathcal{I} = \{[0,2],[1,3],[3,4]\}$

un **sommet** ⇔ un **intervalle**



une **arête** entre deux sommets ⇔ les deux intervalles ont une **intersection non vide**



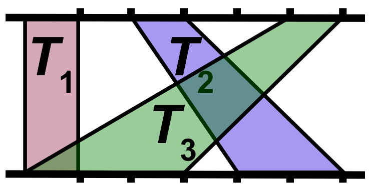
$\mathcal{I}$ est une **réalisation** du **graphe d'intersection** *G*.

G est un **graphe d'intervalles.**

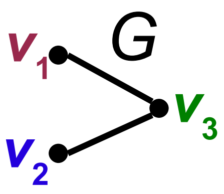
Les graphes trapézoïdaux

$$\mathcal{T} = \{([0,1],[0,1]),\ ([2,3],[4,6]),\ ([5,6],[0,3])\}$$

un **sommet** ⇔ un **trapèze** entre deux lignes horizontales



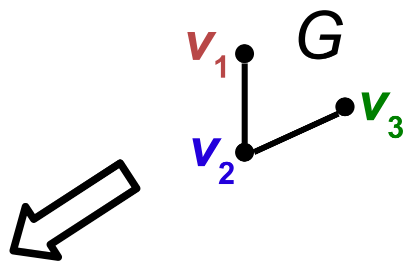
une **arête** entre deux sommets ⇔ les deux trapèzes ont une **intersection non vide**



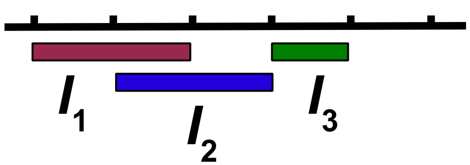
G est un ***graphe trapézoïdal.***

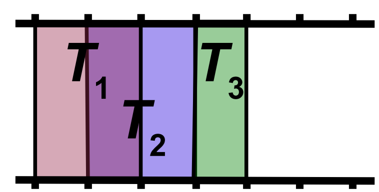
Classes de graphes

Tout graphe d'intervalles est un graphe trapézoïdal.



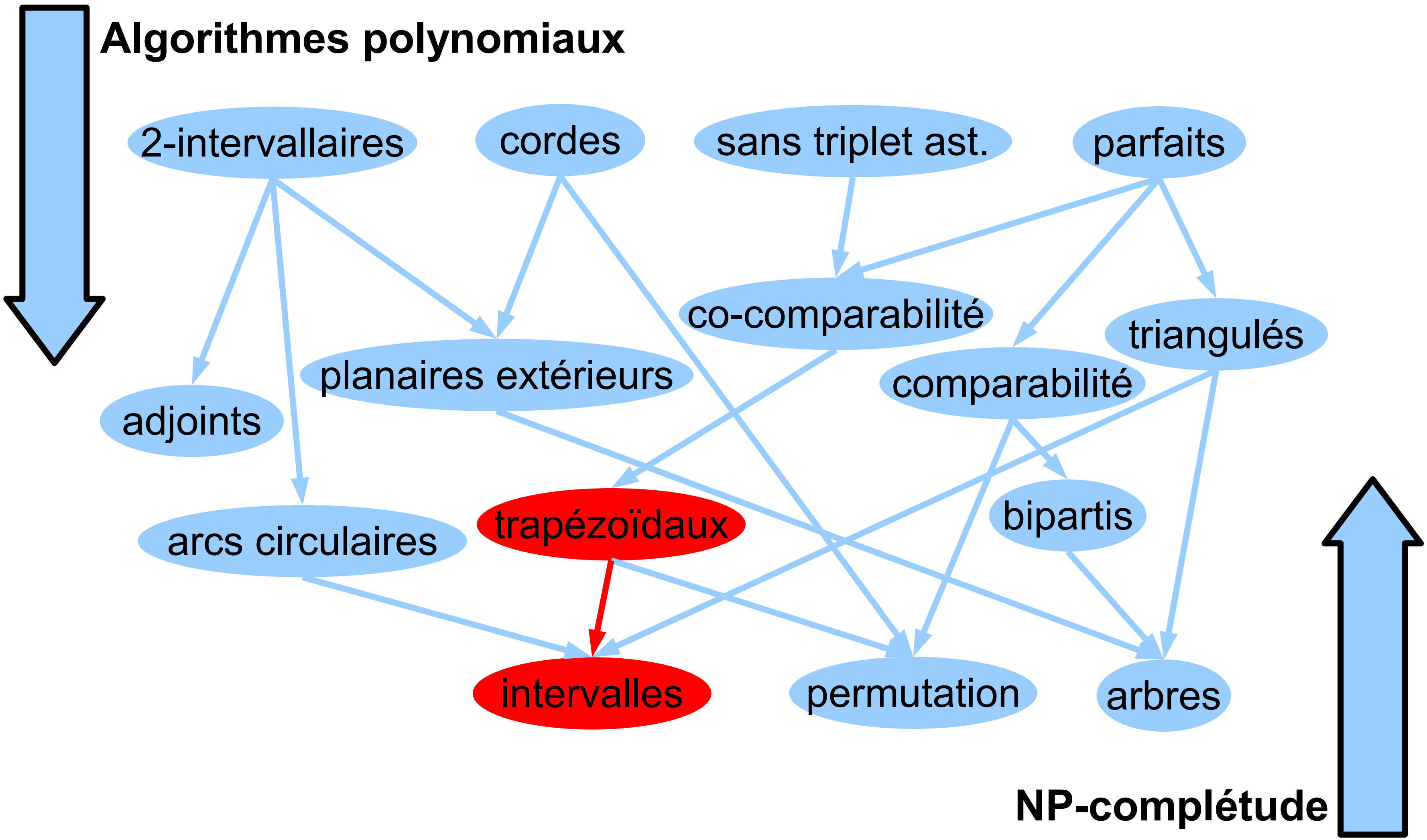
$$\mathcal{I} = \{[0,2],[1,3],[3,4]\} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{T} = \{([0,2],[0,2]),([1,3],[1,3]),([3,4],[3,4])\}$$





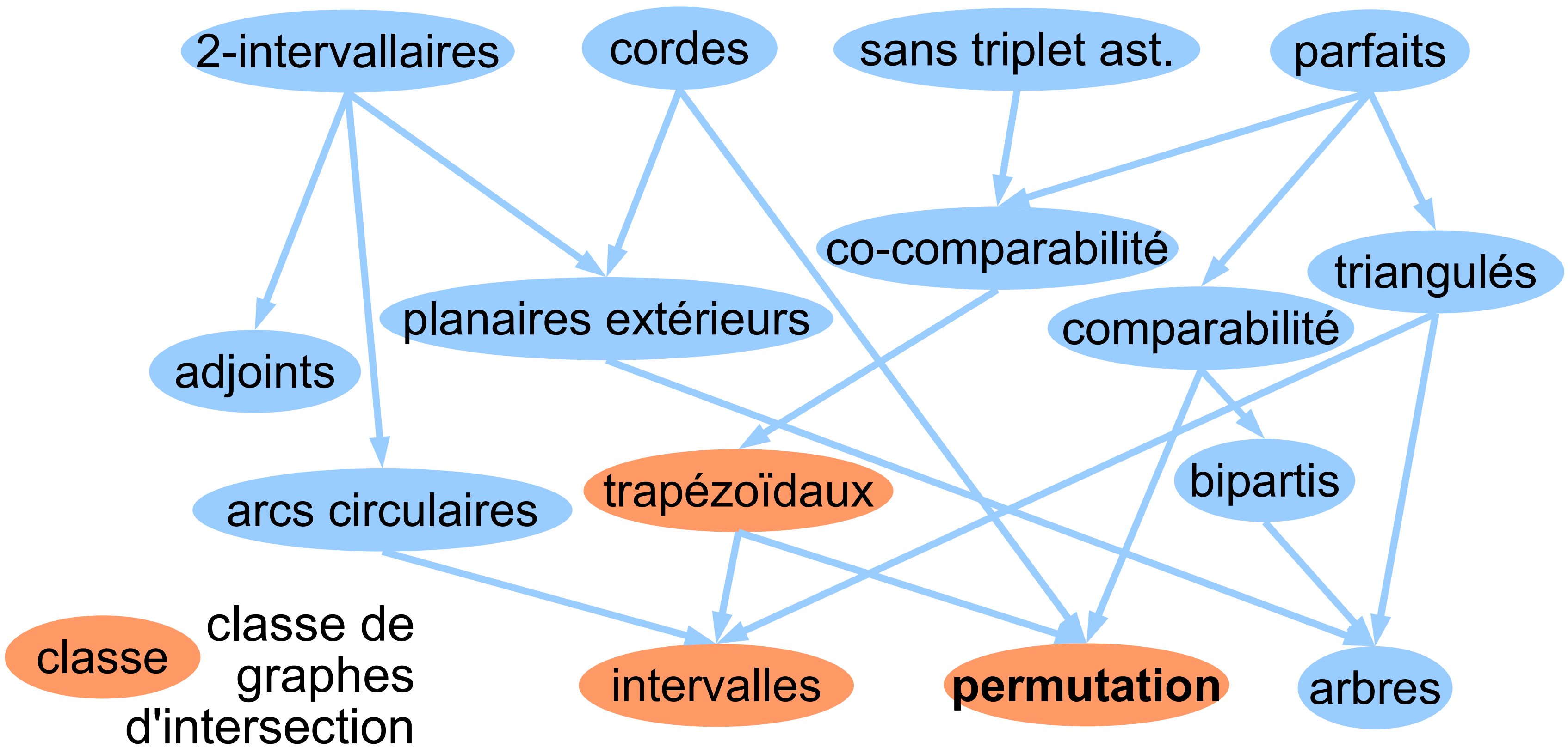
La **classe** de graphes d'intervalles **est incluse** dans celle des graphes trapézoïdaux.

Graphe d'inclusion des classes de graphes



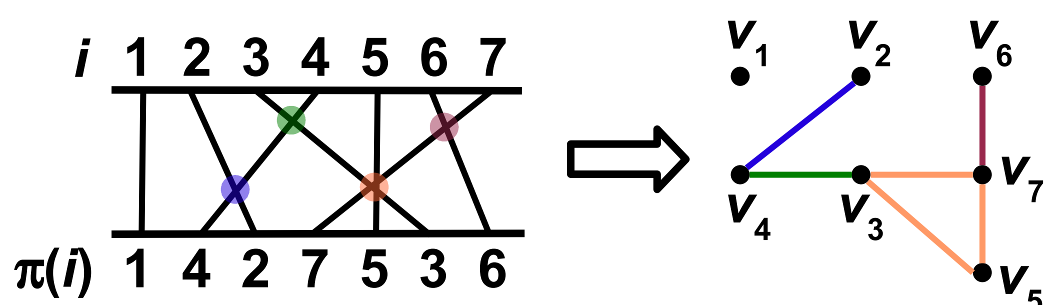
D'après ISGCI

Graphe d'inclusion des classes de graphes

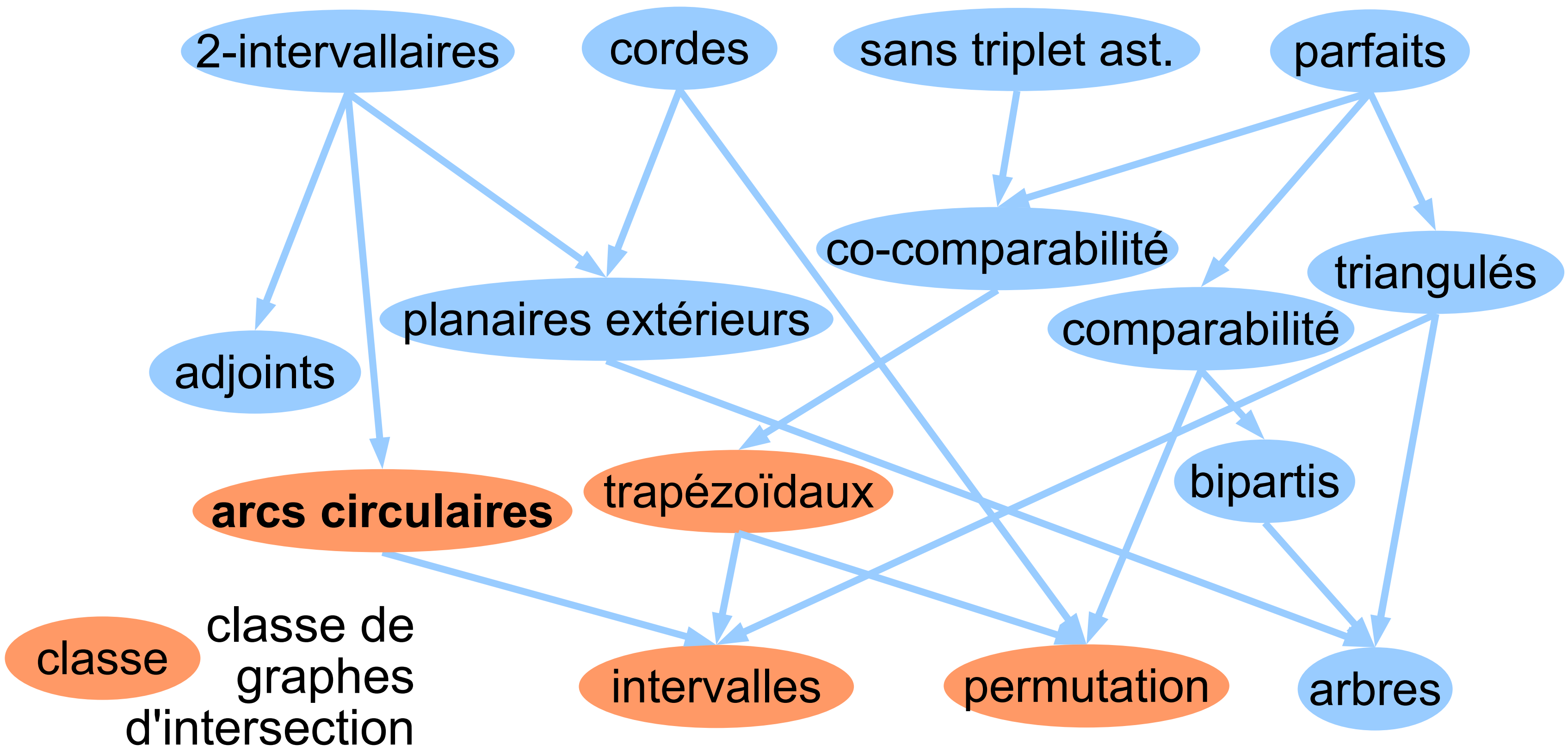


Graphe de **permutation** :
graphe d'intersection des
segments (k,k).

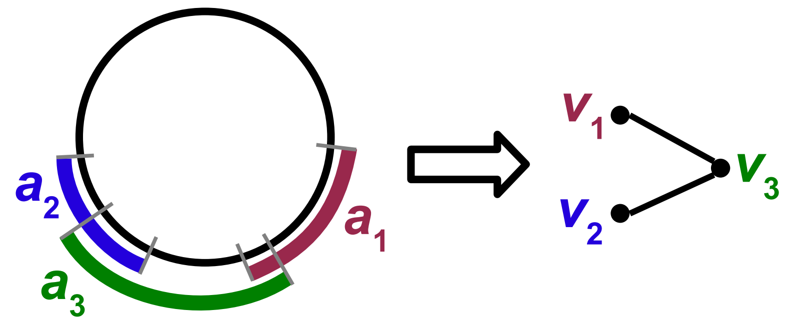
ligne des i ligne des $\pi(i)$



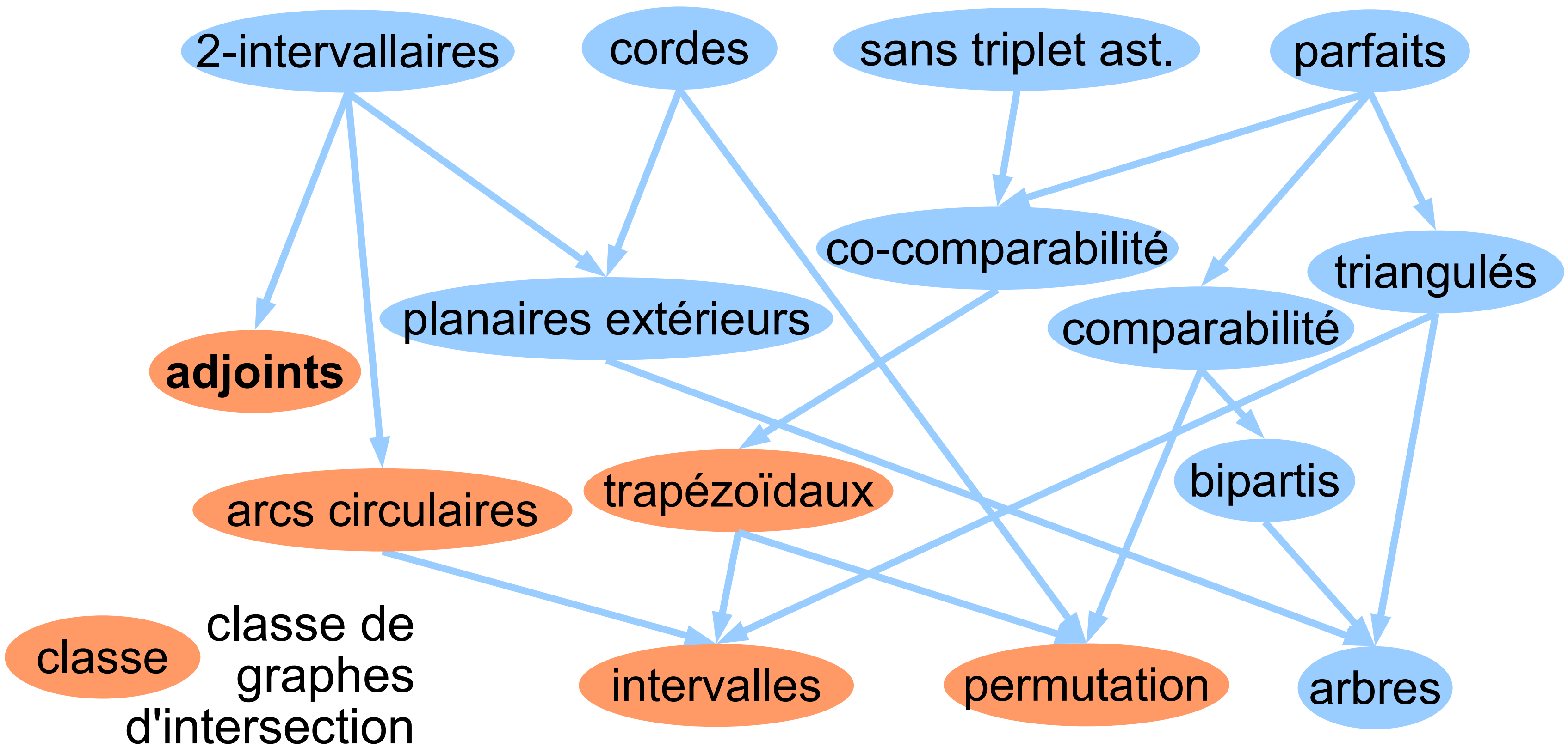
Graphe d'inclusion des classes de graphes



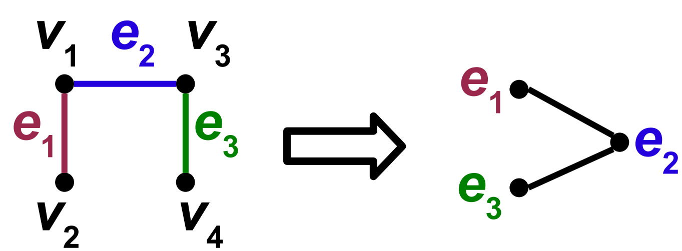
Graphe d'**arcs circulaires** : graphe d'intersection d'**arcs d'un cercle**.



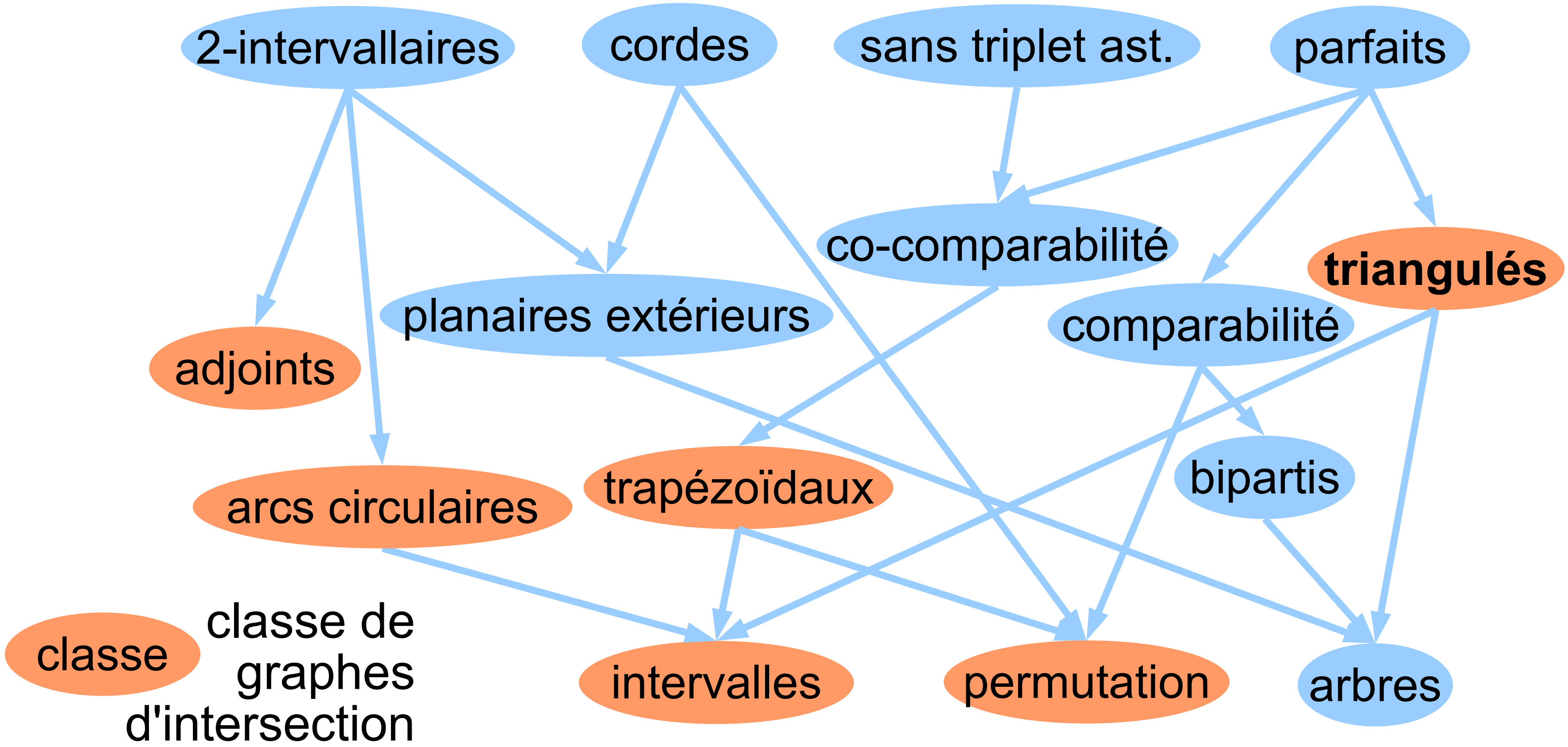
Graphe d'inclusion des classes de graphes



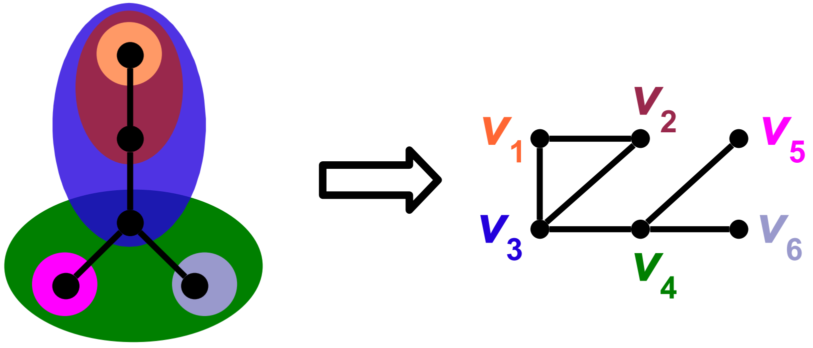
Graphe **adjoint** (***line graph***) : graphe d'intersection des **arêtes d'un graphe**.



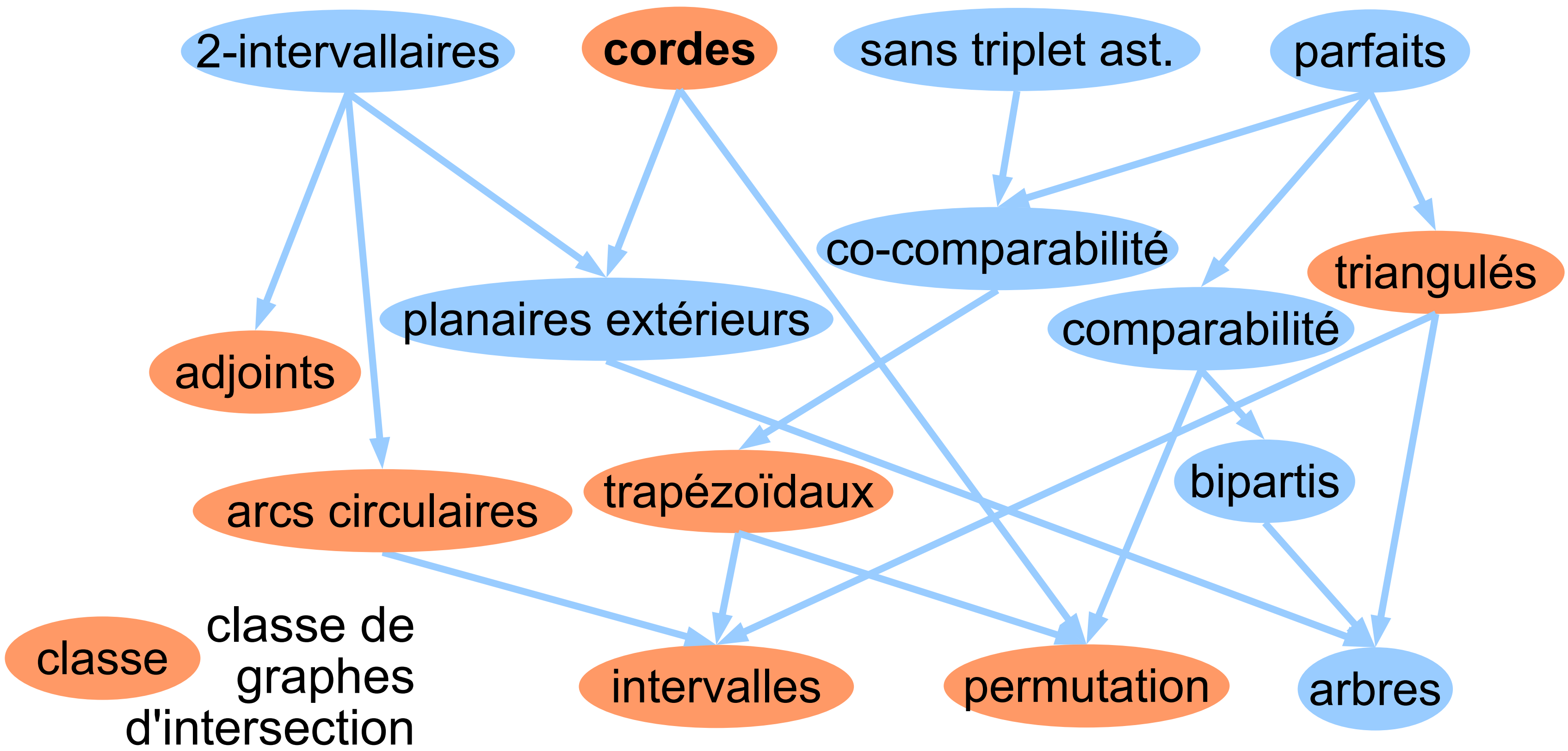
Graphe d'inclusion des classes de graphes



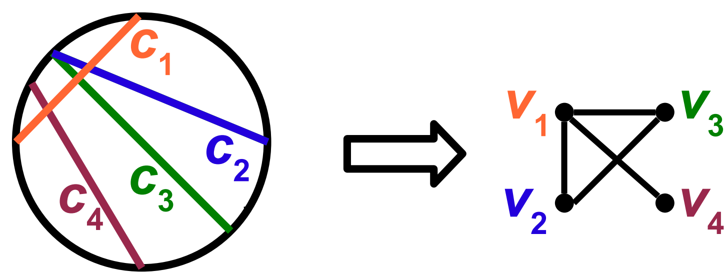
Graphe **triangulé** (***chordal***) : graphe d'intersection d'une famille de **sous-arbres d'un arbre**.



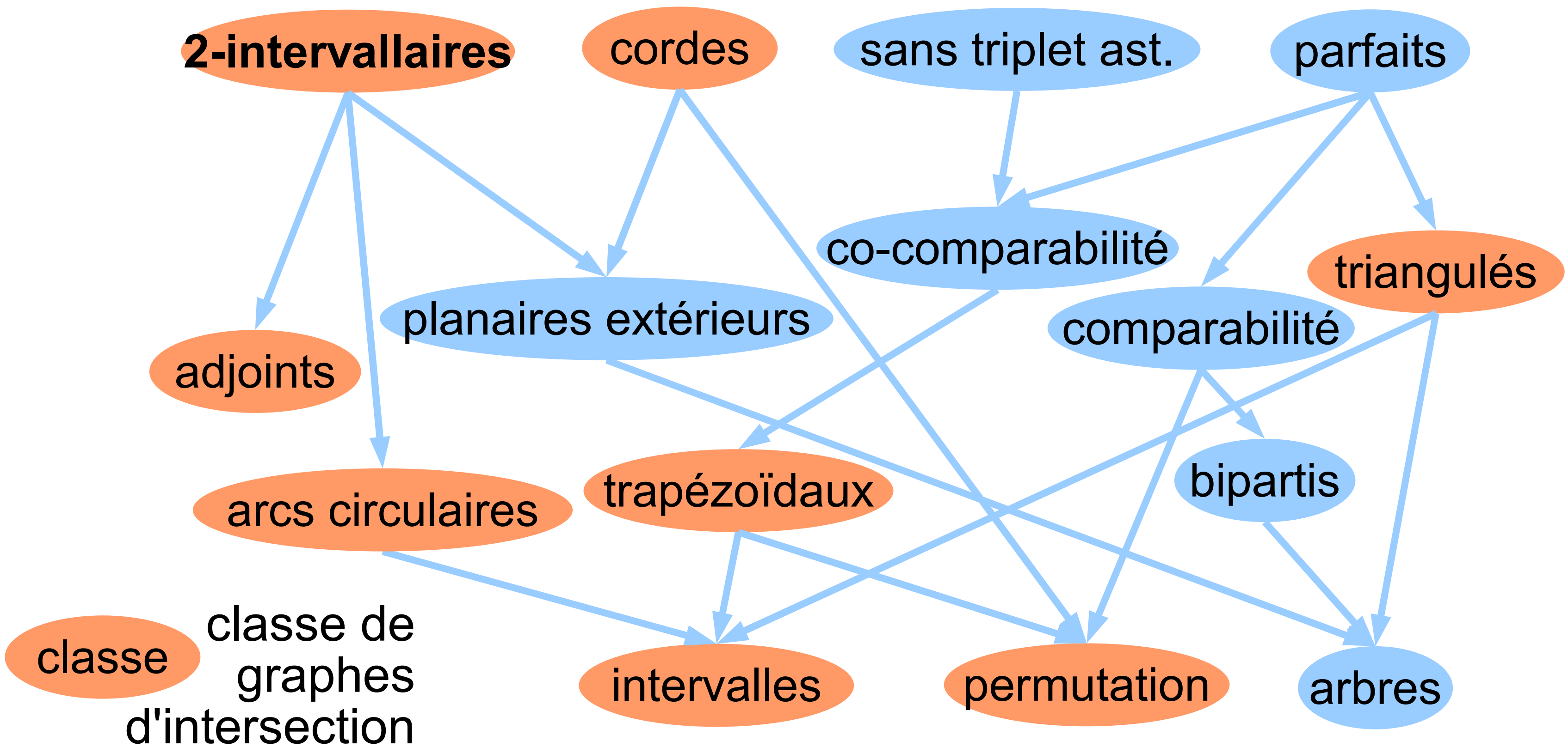
Graphe d'inclusion des classes de graphes



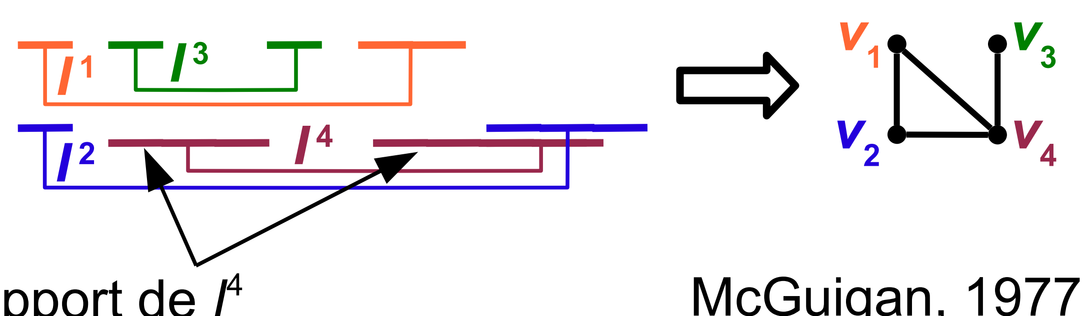
Graphe **de cordes** (***circle***) : graphe d'intersection des **cordes d'un cercle**.



Graphe d'inclusion des classes de graphes



The star of the show, graphe **2-intervallaire** : graphe d'intersection d'unions de deux intervalles.



McGuigan, 1977

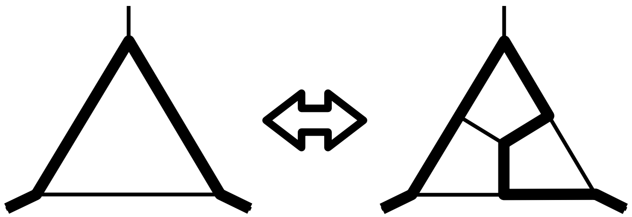
Reconnaissance des graphes 2-intervallaires

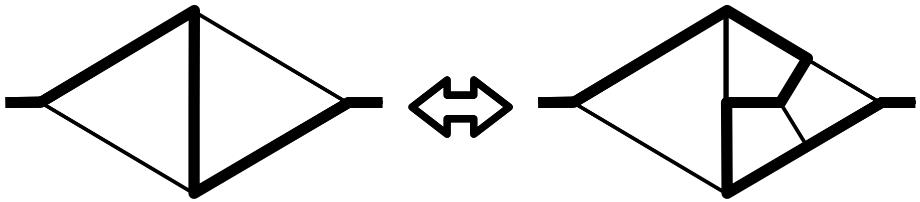
Déterminer, pour un graphe G quelconque, s'il est 2-intervallaire, est **NP-complet** [West & Shmoys,1984]

Idée de la preuve :

Par réduction du problème de **Cycle Hamiltonien sur les graphes 3-réguliers**, qui est **NP-complet** [Garey,Johnson,Tarjan,1976].

Première étape : réduction à **Cycle Hamiltonien sur les graphes 3-réguliers sans triangle**.

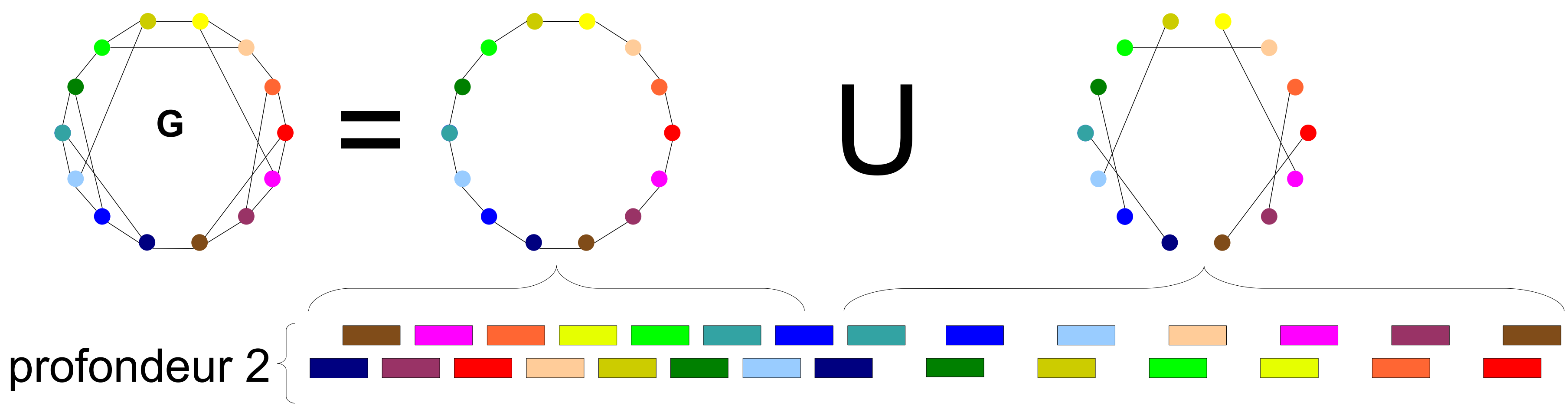




Reconnaissance des graphes 2-intervallaires

Deuxième étape : pour tout **graphe *G* 3-régulier sans triangle**, construction en temps polynomial d'un graphe ***G'* qui est 2-intervallaire** ssi ***G* admet un cycle hamiltonien**.

L'idée : si *G* a un cycle hamiltonien, ajouter des gadgets sur *G* pour obtenir *G'* et **forcer** que **toute réalisation** 2-intervallaire de G' soit une ***H*-représentation** :



une *H*-représentation de *G*

Problèmes sur les graphes 2-intervallaires

Reconnaissance : NP-complet (West & Shmoys, 1984)

Coloration : NP-complet (sur-classe des graphes adjoints)

Stable maximum : NP-complet
(Bafna et al, 1996; Vialette, 2001)

Clique maximum : ouvert, NP-complet sur les graphes
3-intervallaires (Butman et al, 2007)

Motivations

Un **2-intervalle** modélise :

- une tâche coupée en 2 dans un problème d'**ordonnancement**
- deux portions similaires ou complémentaires inversées d'**ADN**
- deux portions complémentaires et inversées d'**ARN**

Motivations des restrictions

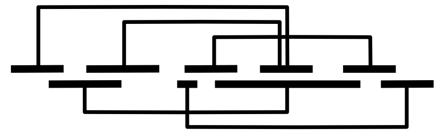
Un **2-intervalle** modélise :

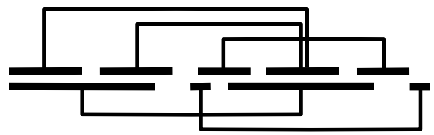
- une tâche coupée en 2 dans un problème d'**ordonnancement**
- deux portions similaires ou complémentaires inversées d'**ADN**
- deux portions complémentaires et inversées d'**ARN**

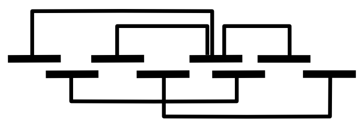
Intervalles de même longueur !

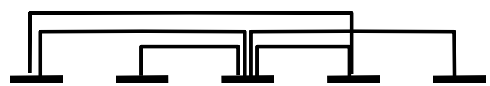
Graphes 2-intervallaires et restrictions

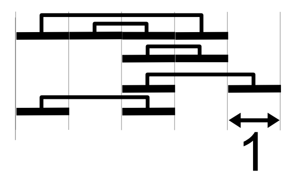
Support d'un ensemble de 2-intervalles :
ensemble des **intervalles support** des 2-intervalles.

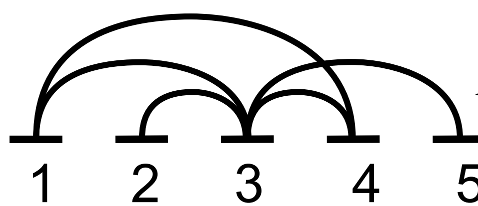
Support sans restriction : 

Support **équilibré :** 

Support **unitaire :** 

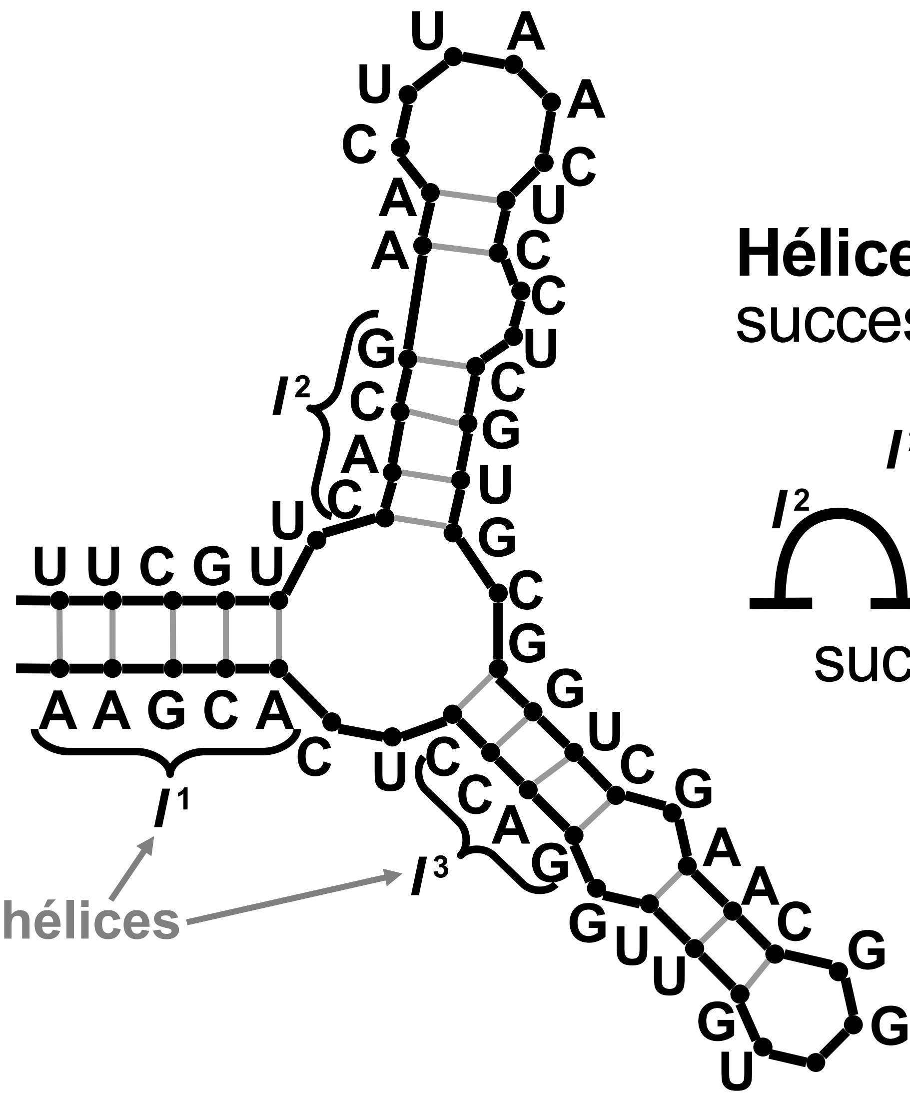
Support **disjoint :** 

graphes (1,1)-intervallaires : 

graphes adjoints 

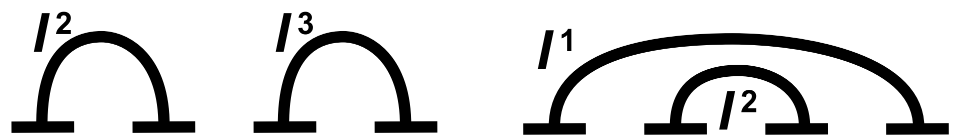
graphe aux noeuds étiquetés sans noeud isolé

Motivations : cas de l'ARN



Hélices : appariements de portions successives ou emboîtées d'ARN.

$I^2 < I^3$ $\qquad$ $I^1 \sqsubset I^2$

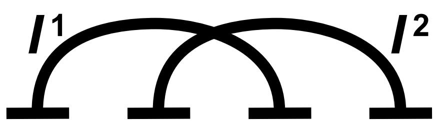


successifs $\qquad$ emboîtés

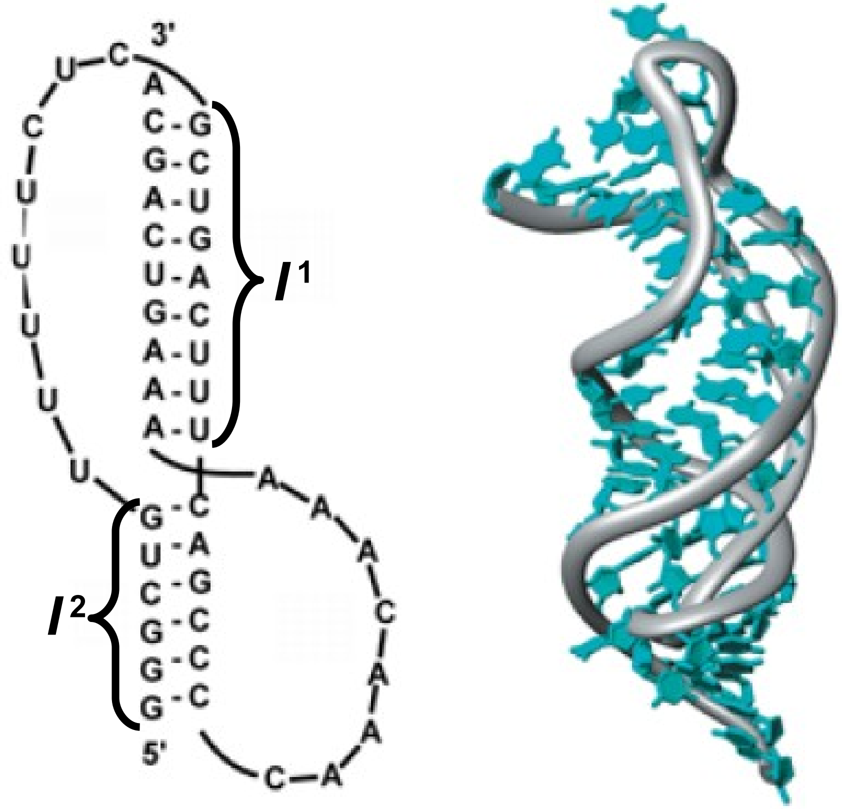
Motivations : cas de l'ARN

Pseudo-noeud :
appariement de nucléotides entrelacés.

$l^1 \between l^2$



croisés

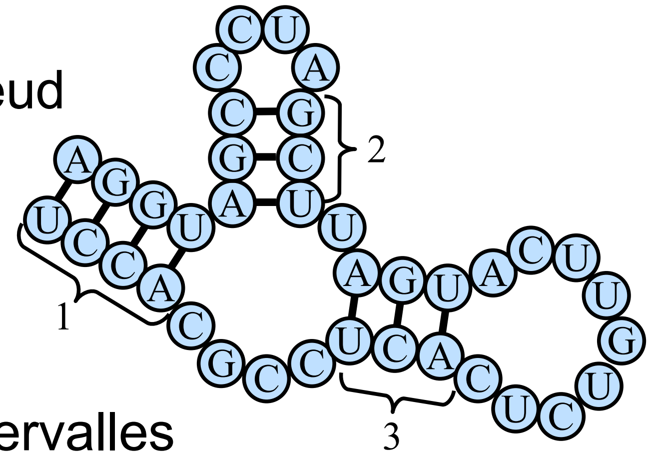


Extrémité 5' du composant ARN de la télomérase humaine

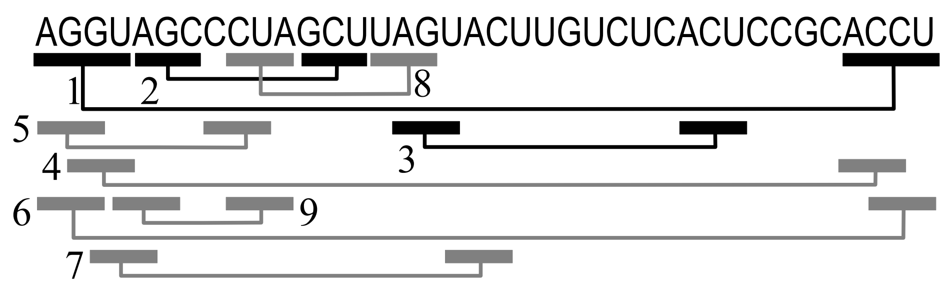
D'après D.W. Staple, S.E. Butcher, *Pseudoknots: RNA structures with Diverse Functions* (PloS Biology 2005 3:6 p.957)

ARN et stable max

Trouver les **hélices** d'un ARN sans pseudo-noeud
donné comme une suite de nucléotides.

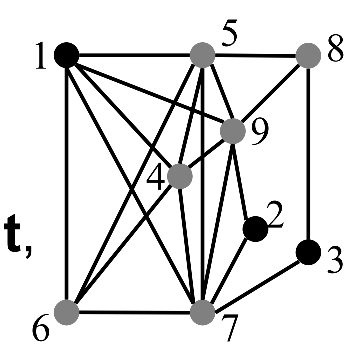


Trouver le plus **grand sous-ensemble** de 2-intervalles **disjoints**, uniquement **successifs ou emboîtés**,
dans un ensemble de 2-intervalles : **2-interval pattern** (**2-IP**).



Trouver le **stable maximum** du graphe tel que :

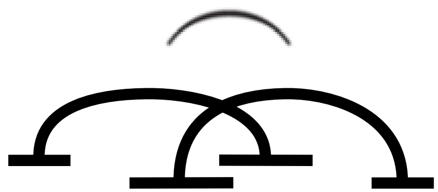
- les **sommets** correspondent aux **2-intervalles**,
- une **arête** joint deux 2-intervalles qui **s'intersectent**,
- une **arête** joint deux 2-intervalles **croisés.**



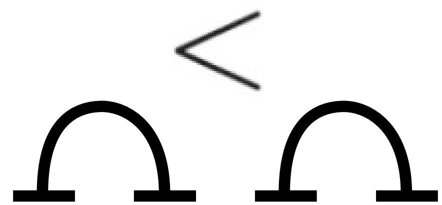
Graphes 2-intervallaires et variantes

16 variantes de la classe des graphes de 2-intervalles :

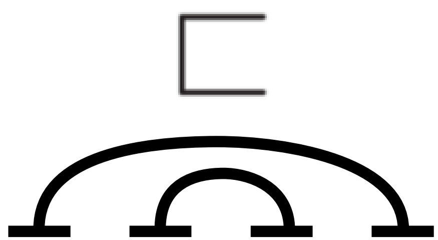
- les **sommets** correspondent aux **2-intervalles**
- une **arête** joint deux 2-intervalles qui sont :



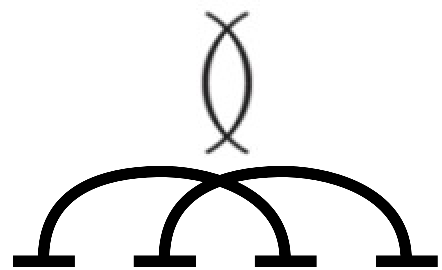
intersectants



successifs



emboîtés



croisés

8 classes à caractériser (et leur complémentaire)

Variantes des graphes 2-intervallaires

Support :	sans restriction	disjoint
$\{\frown, \sqsubset, <, \between\}$	clique	clique
$\{\frown\}$	2-intervallaires	adjoints
$\{\frown, \sqsubset\}$	Classes inconnues, stable max NP-complet	Classe inconnue, stable max NP-complet
$\{\frown, <\}$		Classe inconnue, stable max polynomial
$\{\frown, \between\}$	Inclusions utiles dans des classes de graphes	cordes
$\{\frown, \sqsubset, <\}$		$\overline{\text{cordes}}$
$\{\frown, \sqsubset, \between\}$	intervalles	intervalles
$\{\frown, <, \between\}$	trapézoïdaux	permutation

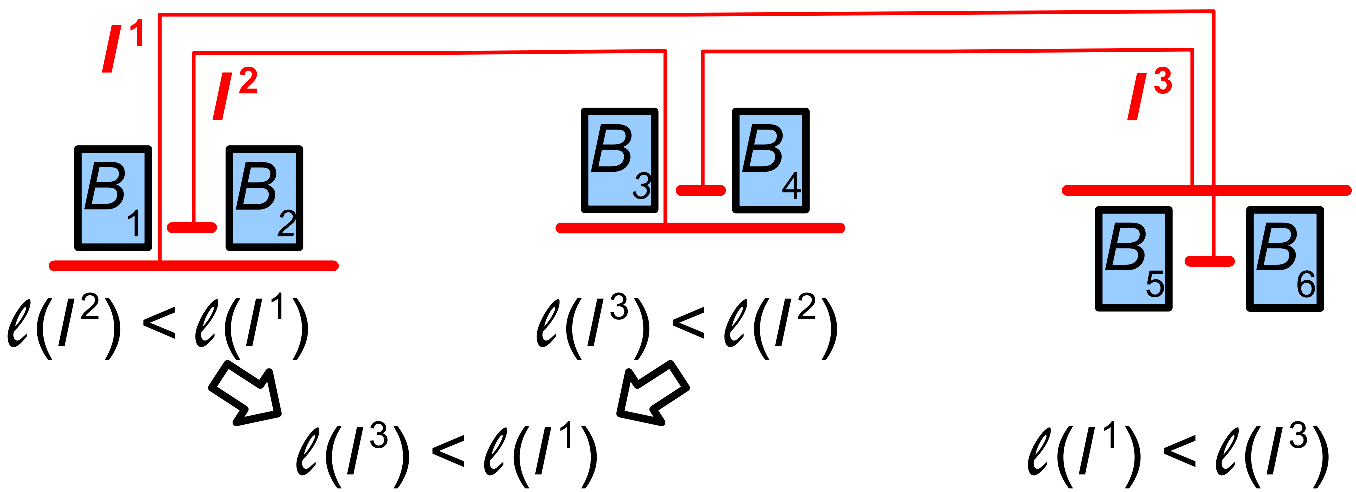
Problème 2-interval-pattern

Support :	sans restriction	disjoint
$\{<, \sqsubset, \between\}$	NP-complet, Bafna et al, 96	O($n\sqrt{n}$), Micali Vazirani, 80
$\{<, \between\}$	NP-complet, Blin et al, 06	NP-complet, Li Xu, 07?
$\{\sqsubset, \between\}$	NP-complet, Vialette, 04	O(n^2), Chen et al, 05
$\{<, \sqsubset\}$	O(n^2), Vialette, 01	O(n^2), Vialette, 01
$\{\between\}$	O(n^2) Chen et al, 05	O($n\sqrt{n}$), Tiskin, 06
$\{<\}$	O(n log n), Vialette, 04	O(n log n), Vialette, 04
$\{\sqsubset\}$	O(n log n), Blin et al, 06	O(n log n), Blin et al, 06

Classe des 2-intervallaires équilibrés

La classe des **2-intervallaires équilibrés** est s**trictement incluse** dans celle des **2-intervallaires**.

Motif de 2-intervalles non équilibrable :

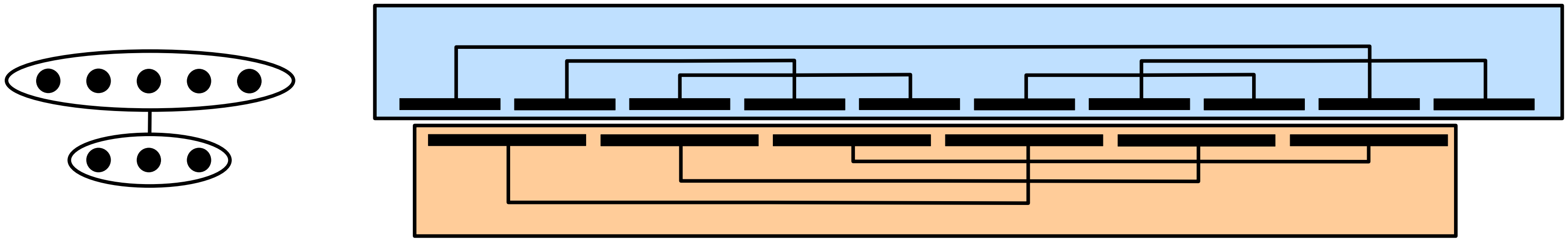


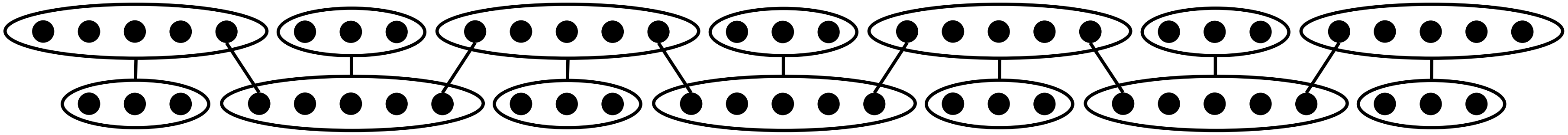
On cherche à construire un graphe où on contraint la présence de **quelque chose de longueur non nulle** (un trou entre deux intervalles) à l'intérieur de chaque boîte B_i.

Classe des 2-intervallaires équilibrés

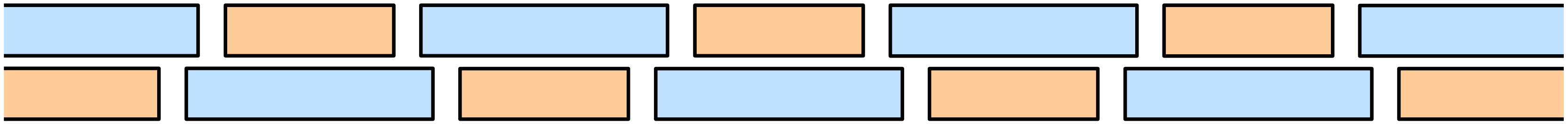
La classe des **2-intervallaires équilibrés** est s**trictement incluse** dans celle des **2-intervallaires**.

Gadget: $K_{5,3}$, toute réalisation 2-intervallaire de $K_{5,3}$ est un ensemble **d'intervalles contigus** (West and Shmoys, 1984)





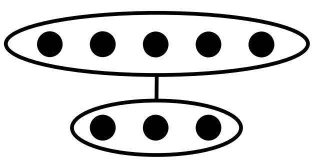
a une réalisation contrainte de la forme :

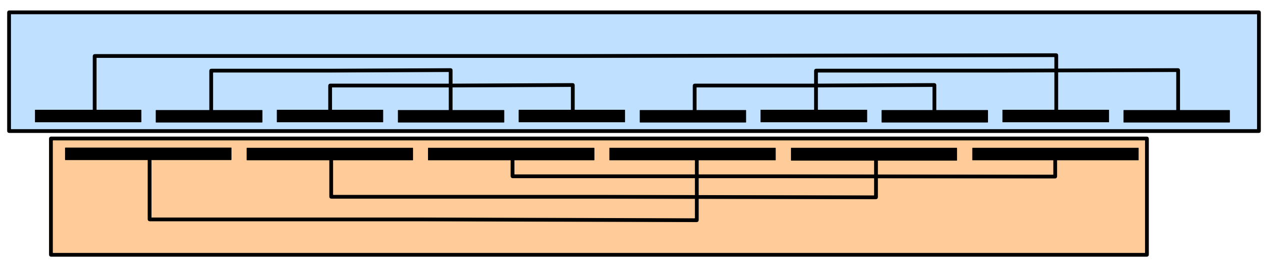


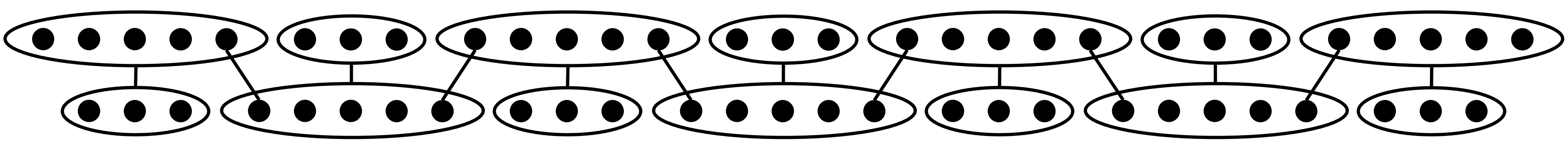
Classe des 2-intervallaires équilibrés

La classe des **2-intervallaires équilibrés** est s**trictement incluse** dans celle des **2-intervallaires**.

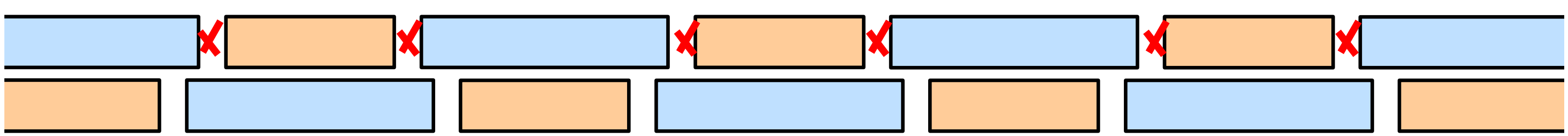
Gadget: $K_{5,3}$, toute réalisation 2-intervallaire de $K_{5,3}$ est un ensemble **d'intervalles contigus** (West and Shmoys, 1984)







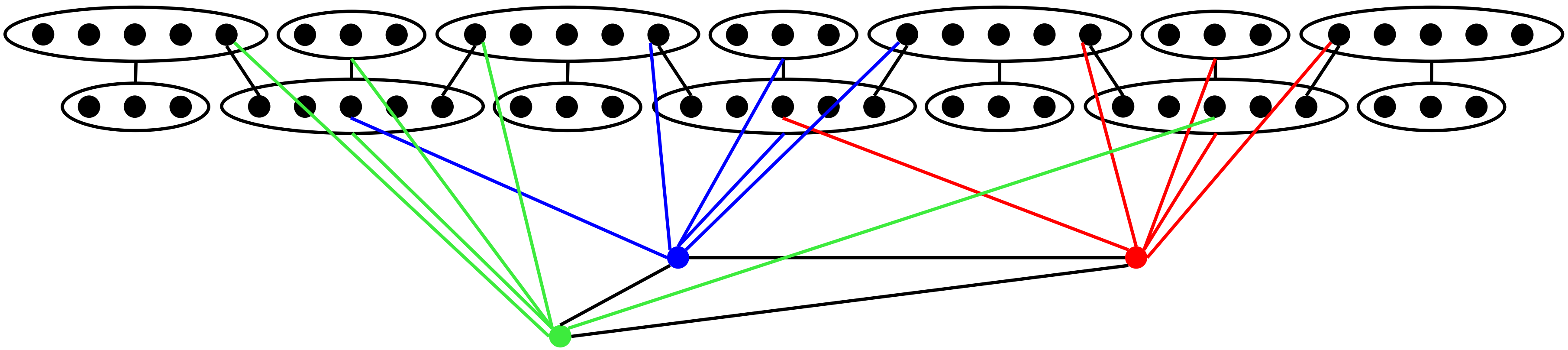
a une réalisation contrainte de la forme :



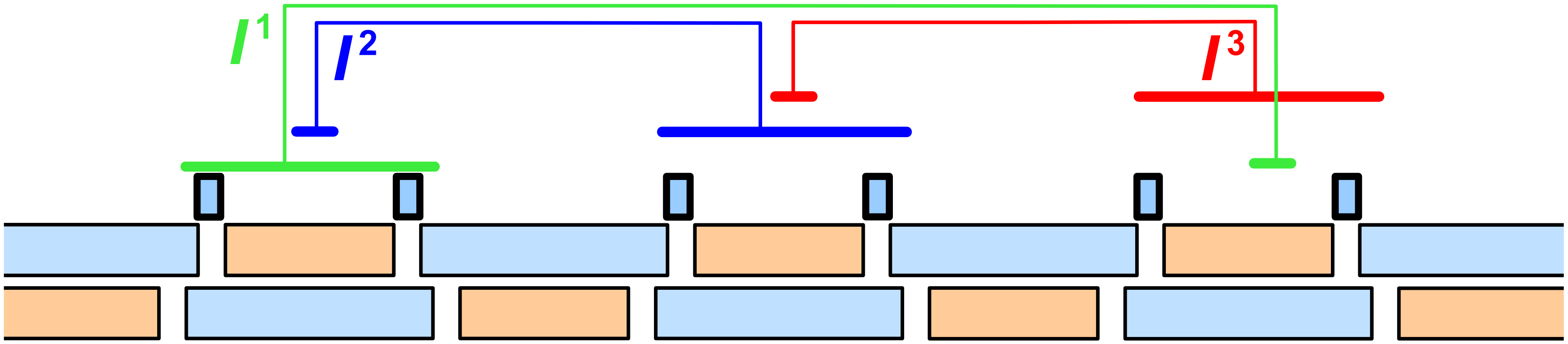
Classe des 2-intervallaires équilibrés

La classe des **2-intervallaires équilibrés** est s**trictement incluse** dans celle des **2-intervallaires**.

Exemple de graphe 2-intervallaire sans réalisation équilibrée :



n'a que des réalisations non équilibrables de la forme :



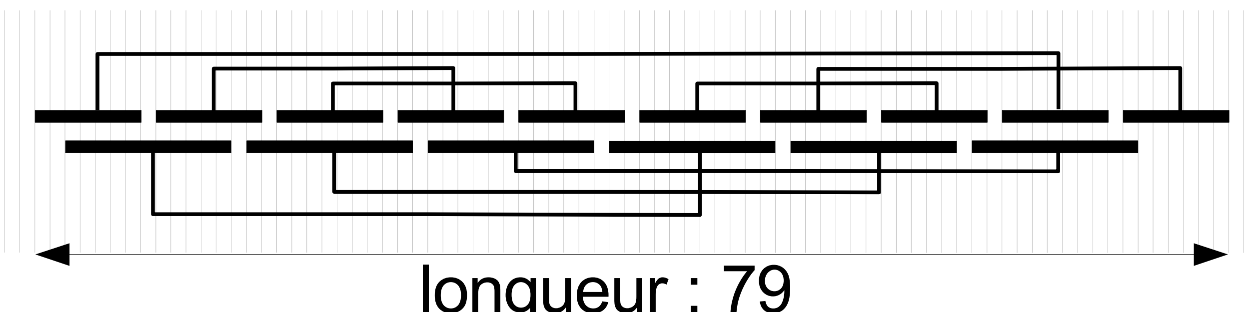
Reconnaissance des 2-intervallaires équilibrés

Déterminer, pour un graphe G quelconque, s'il est 2-intervallaire équilibré, est **NP-complet**.

Idée de la preuve :

Adapter celle de West and Shmoys en utilisant des **gadgets équilibrés**.

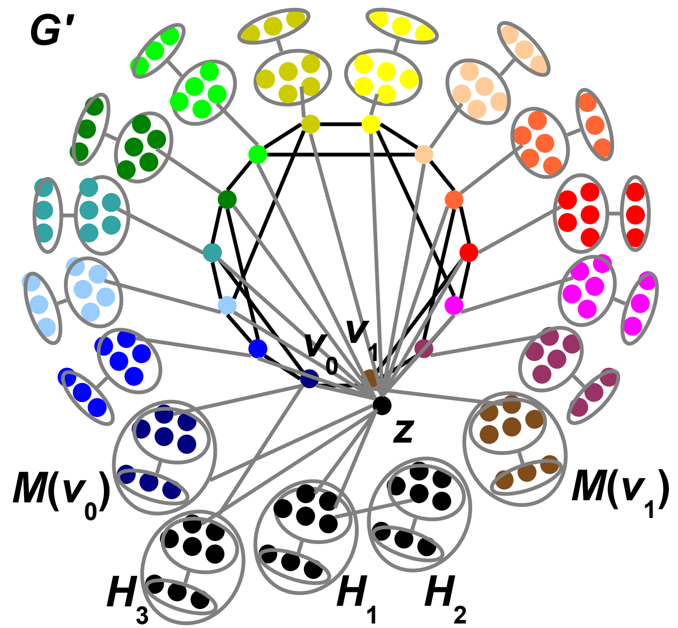
Une réalisation équilibrée de $K_{5,3}$:

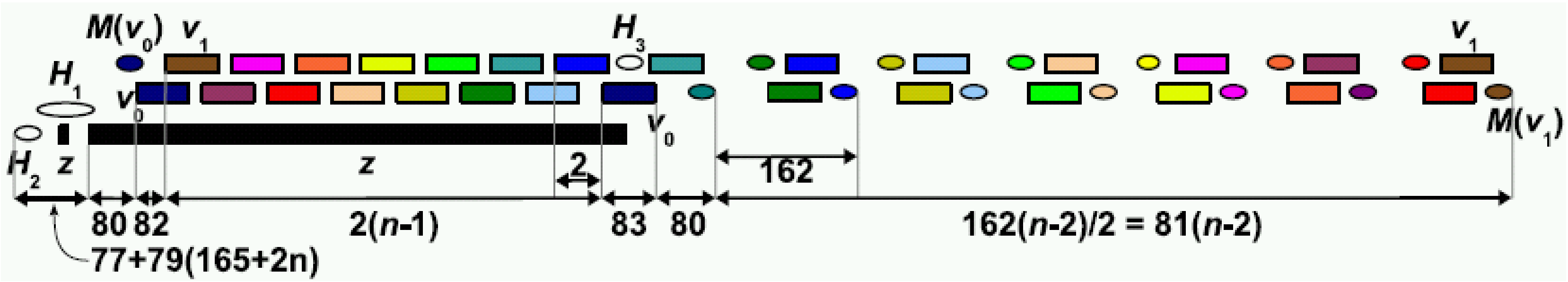


Réduction depuis **Cycle Hamiltonien sur les graphes 3-réguliers sans triangle**

Reconnaissance des 2-intervallaires équilibrés

Déterminer, pour un graphe G quelconque, s'il est 2-intervallaire équilibré, est **NP-complet**.

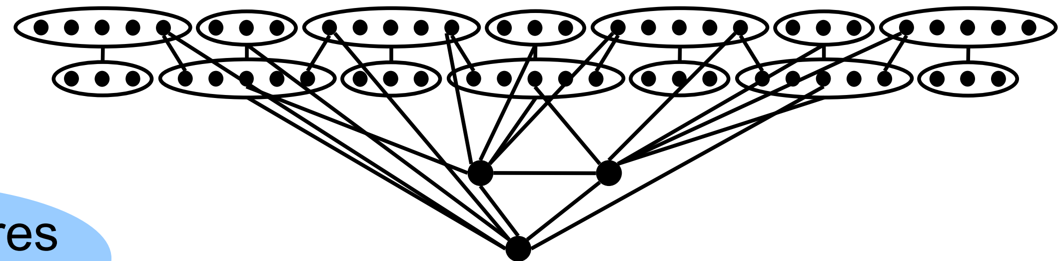




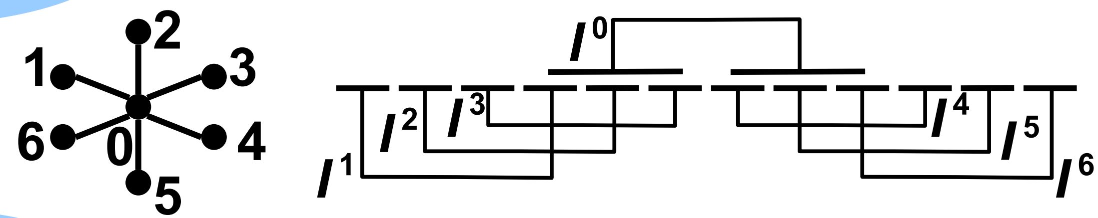
Hiérarchie des 2-intervallaires restreints

Reconnaissance :

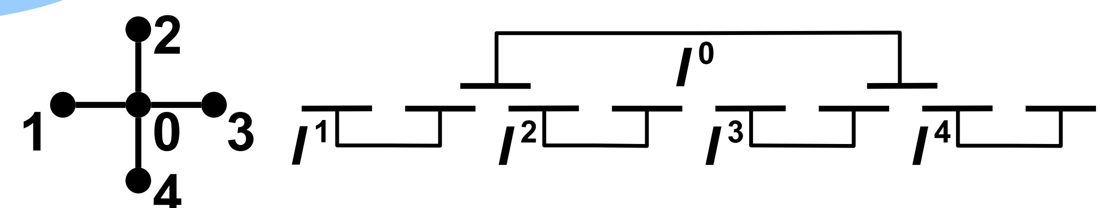
NP-complète — 2-intervallaires



NP-complète — 2-intervallaires équilibrés

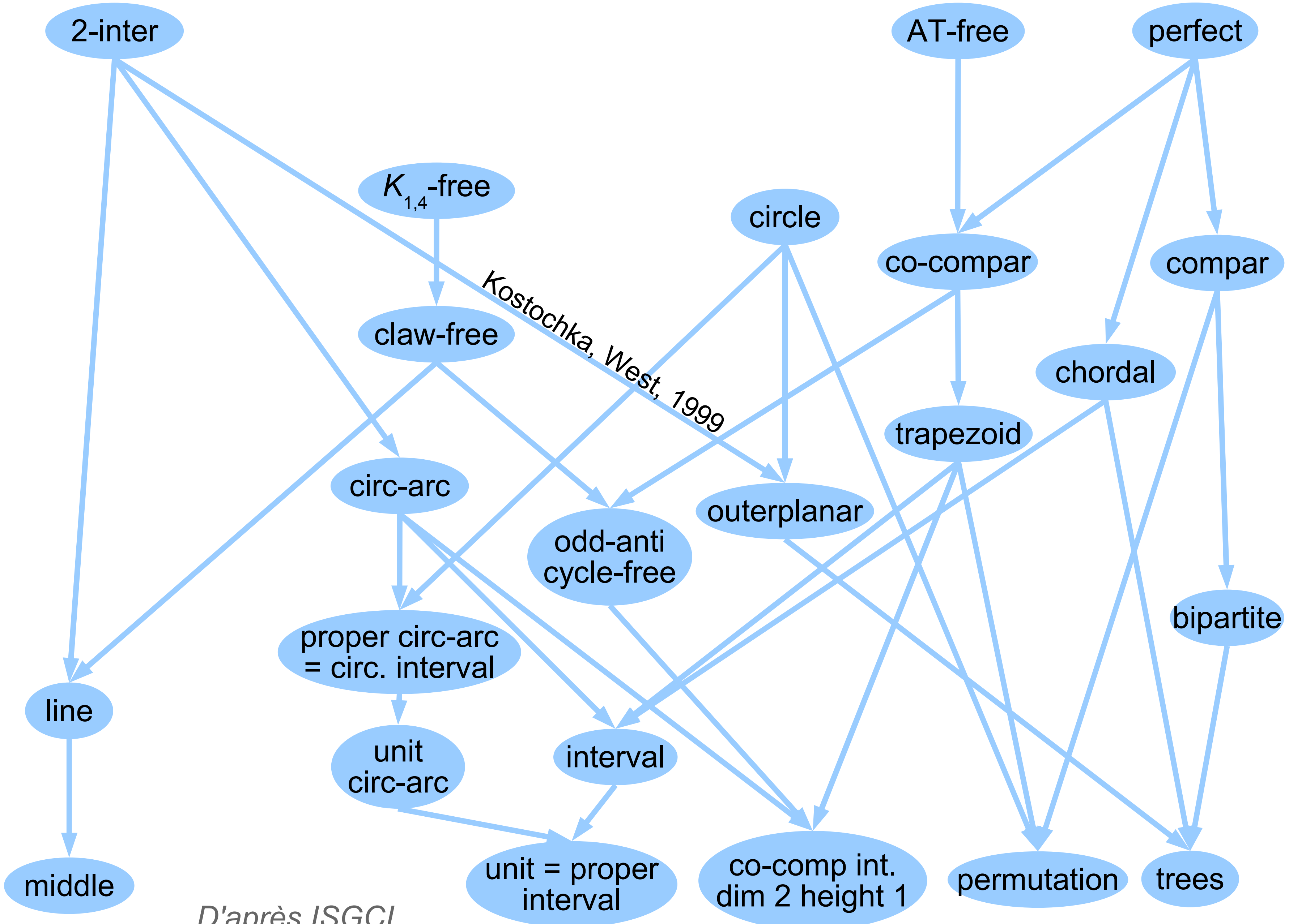


? — 2-intervallaires unitaires



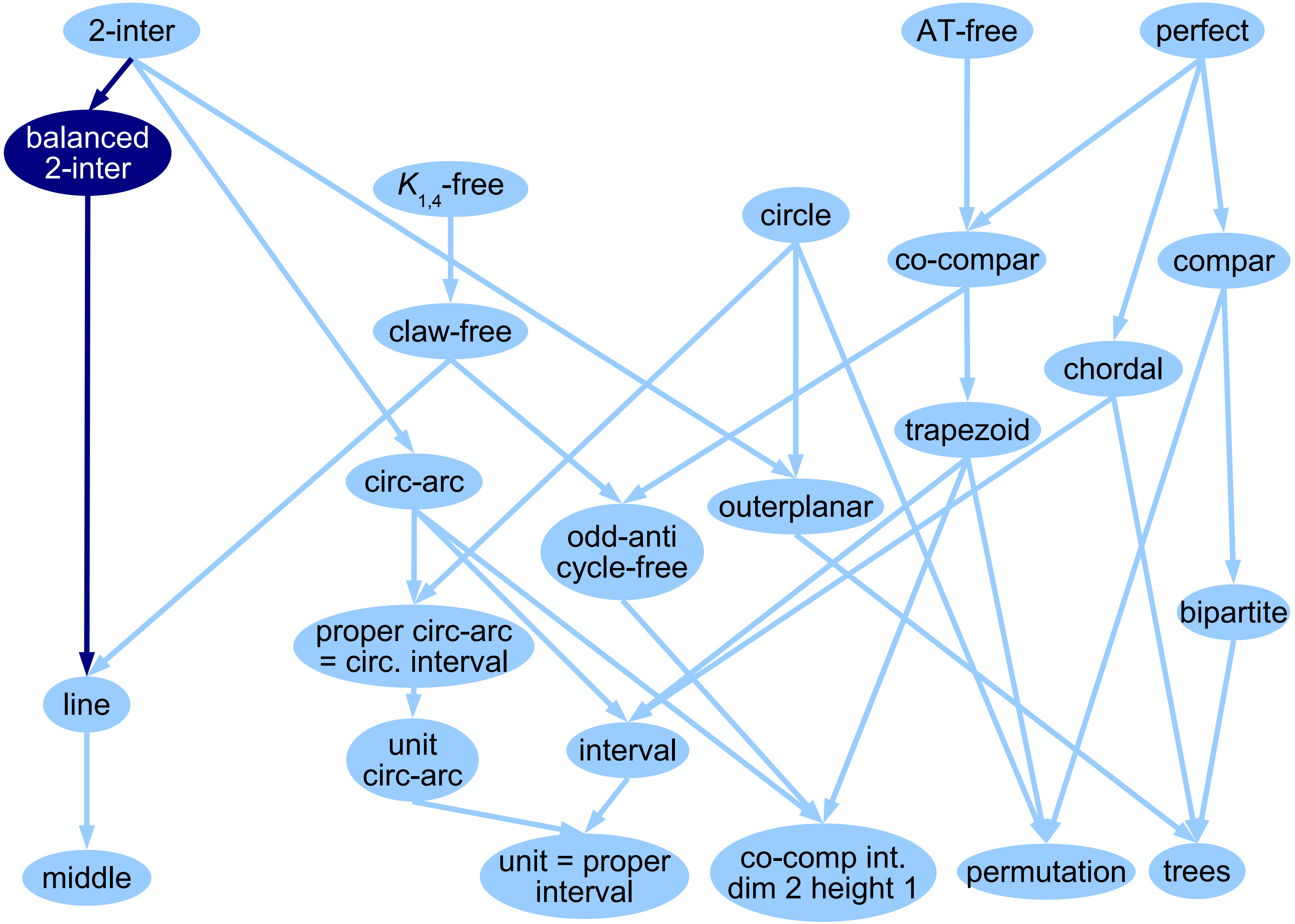
Linéaire — (1,1)-intervallaires

Inclusion des classes de graphes

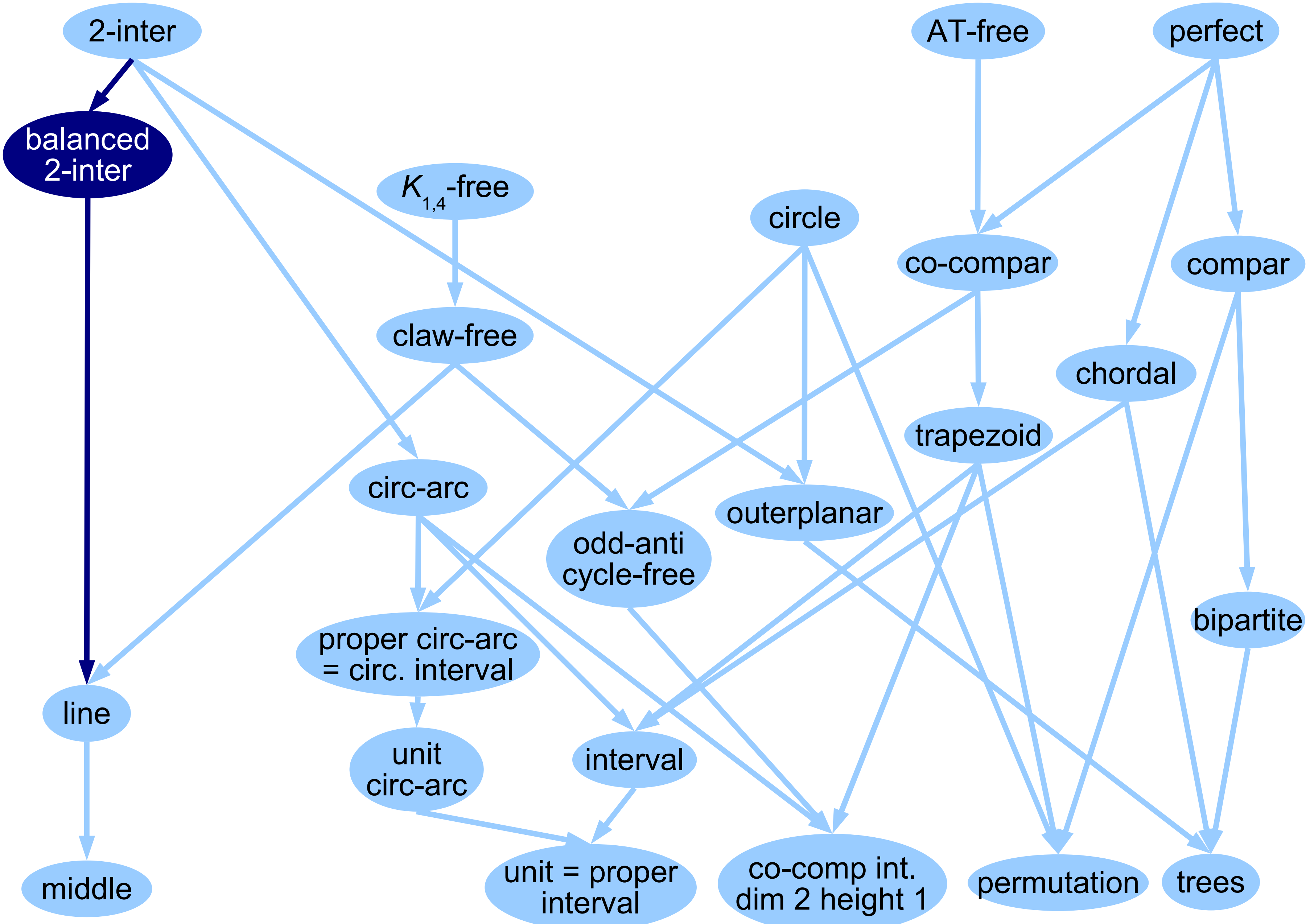


D'après ISGCI

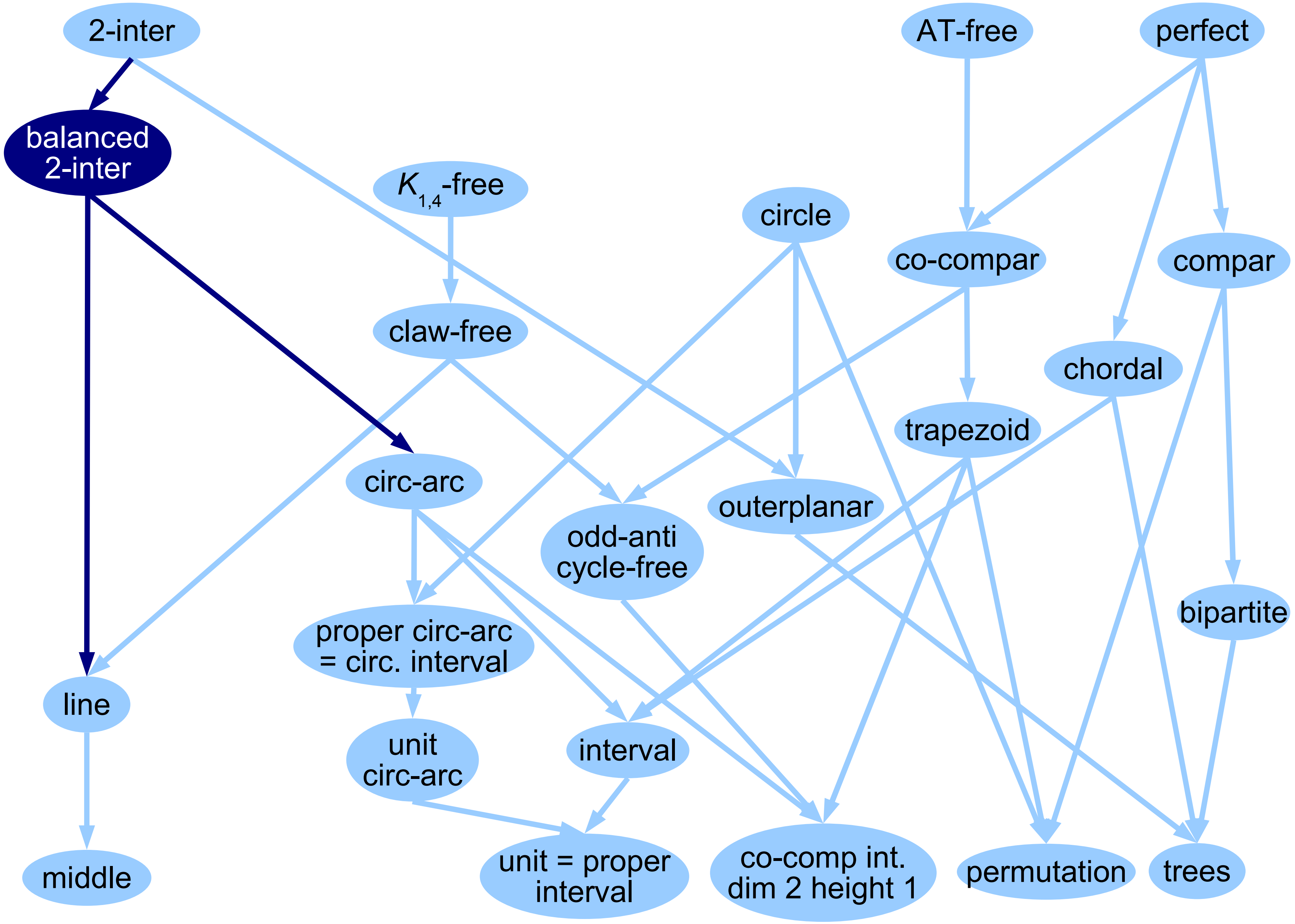
Inclusion des classes de graphes



Inclusion des classes de graphes

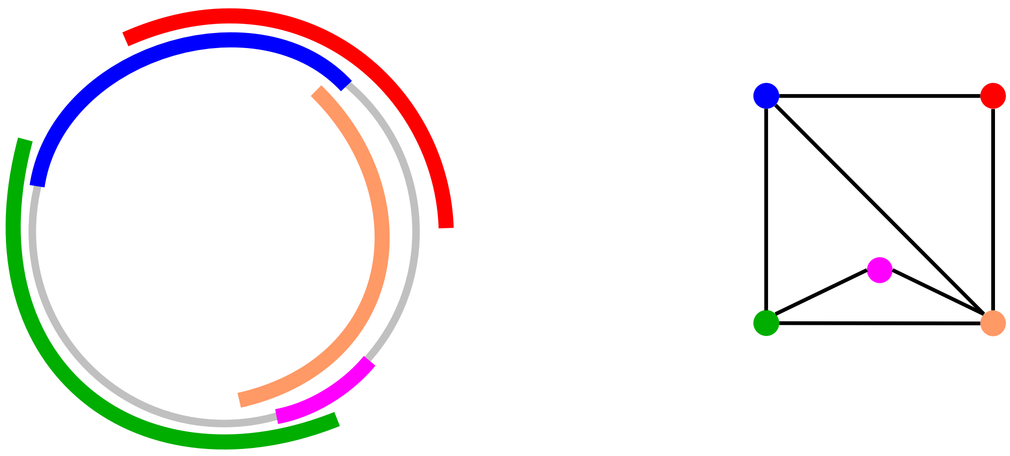


Inclusion des classes de graphes



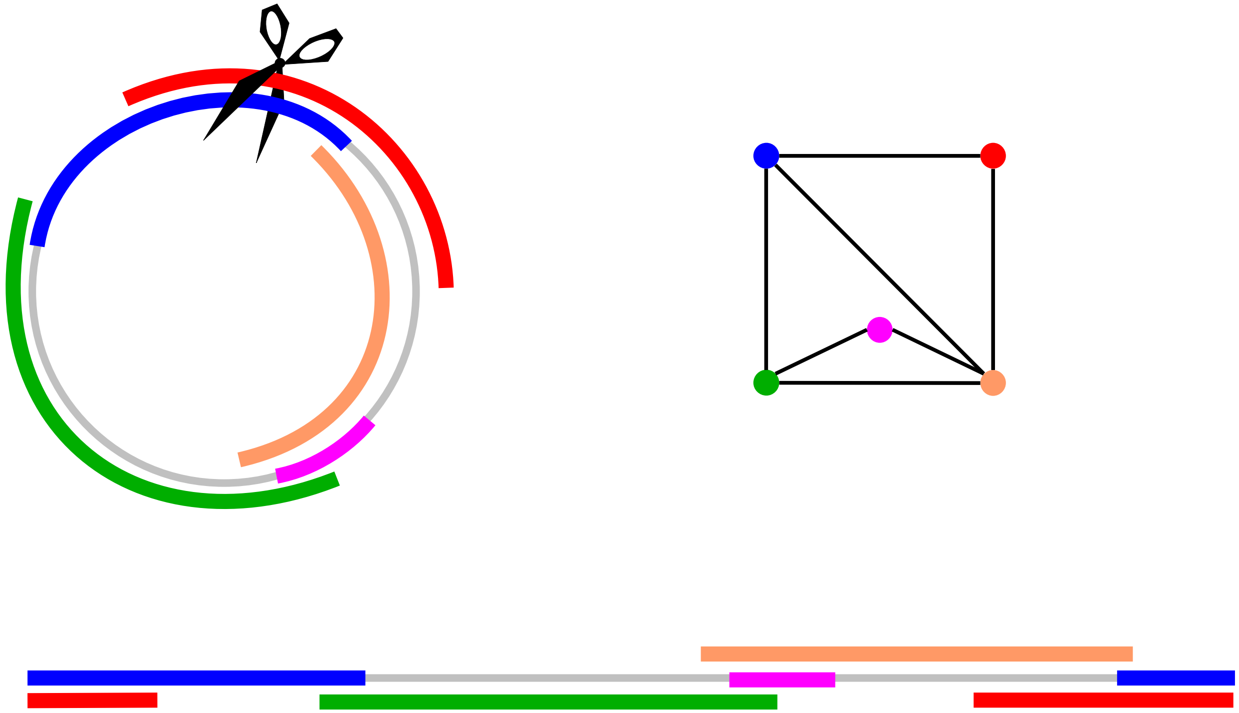
Arcs-circulaires et 2-intervalles équilibrés

Les graphes d'arcs-circulaires sont des graphes 2-intervallaires équilibrés



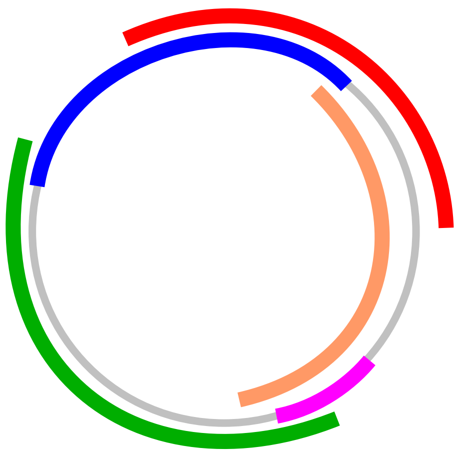
Arcs-circulaires et 2-intervalles équilibrés

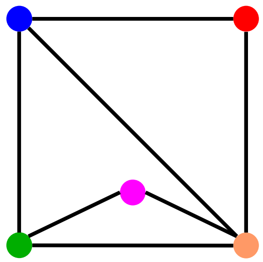
Les graphes d'arcs-circulaires sont des graphes 2-intervallaires équilibrés



Arcs-circulaires et 2-intervalles équilibrés

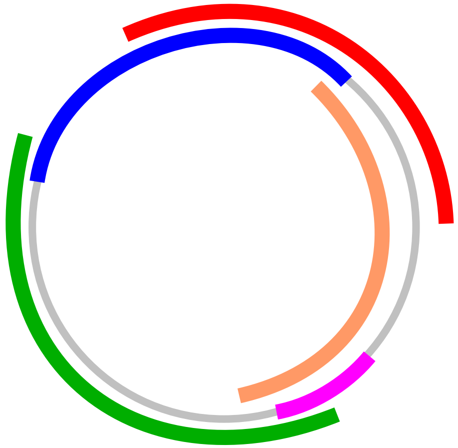
Les graphes d'arcs-circulaires sont des graphes 2-intervallaires équilibrés

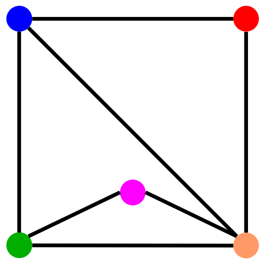


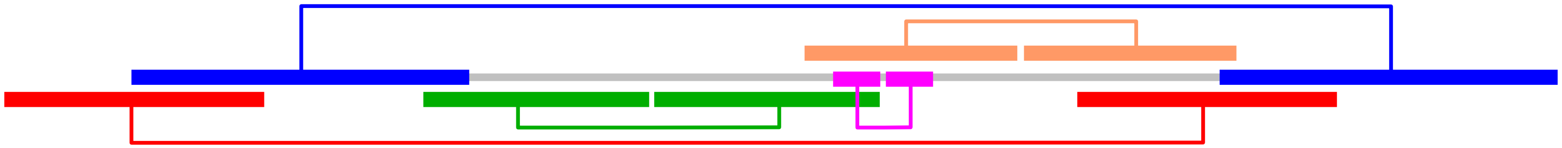


Arcs-circulaires et 2-intervalles équilibrés

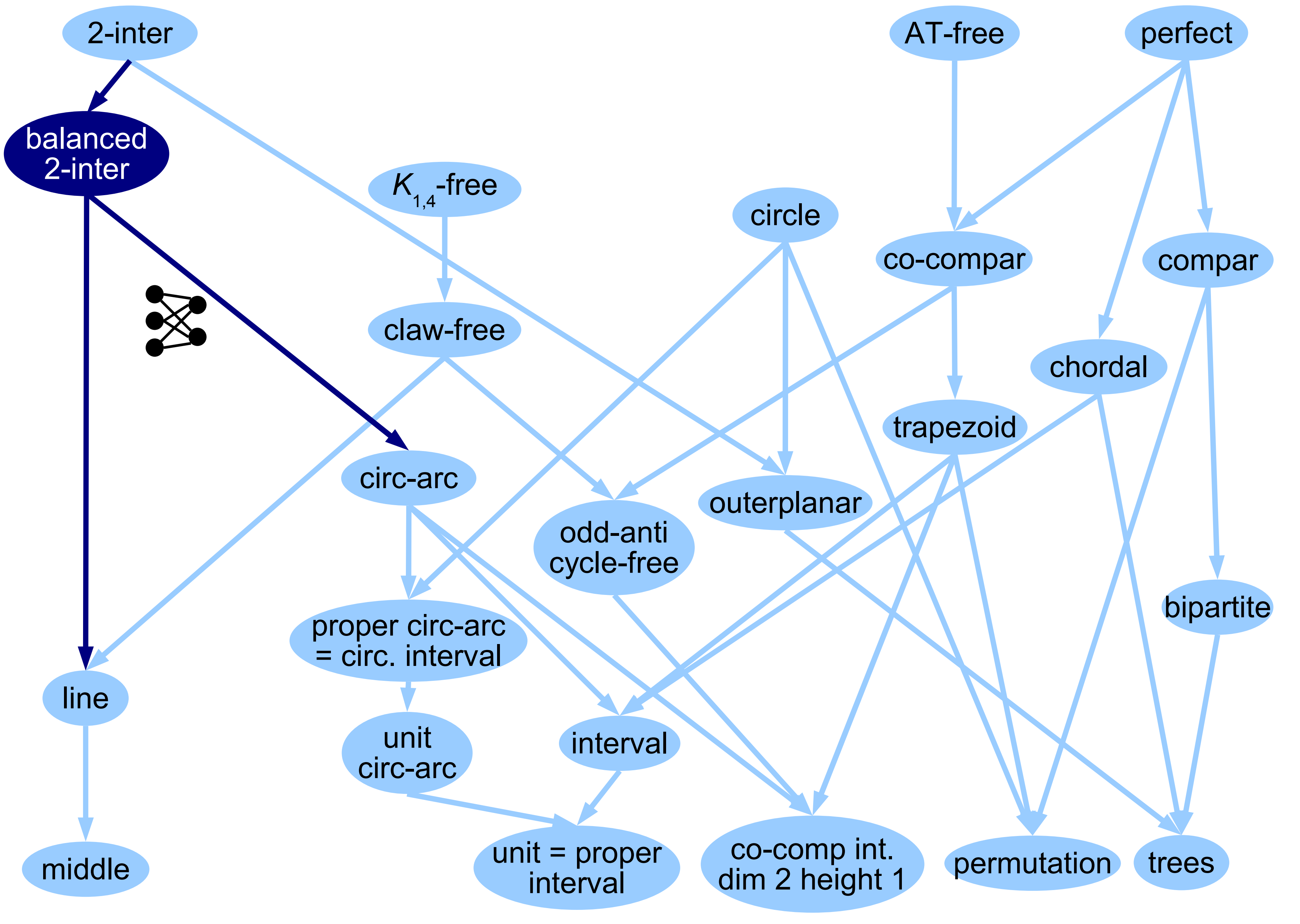
Les graphes d'arcs-circulaires sont des graphes 2-intervallaires équilibrés



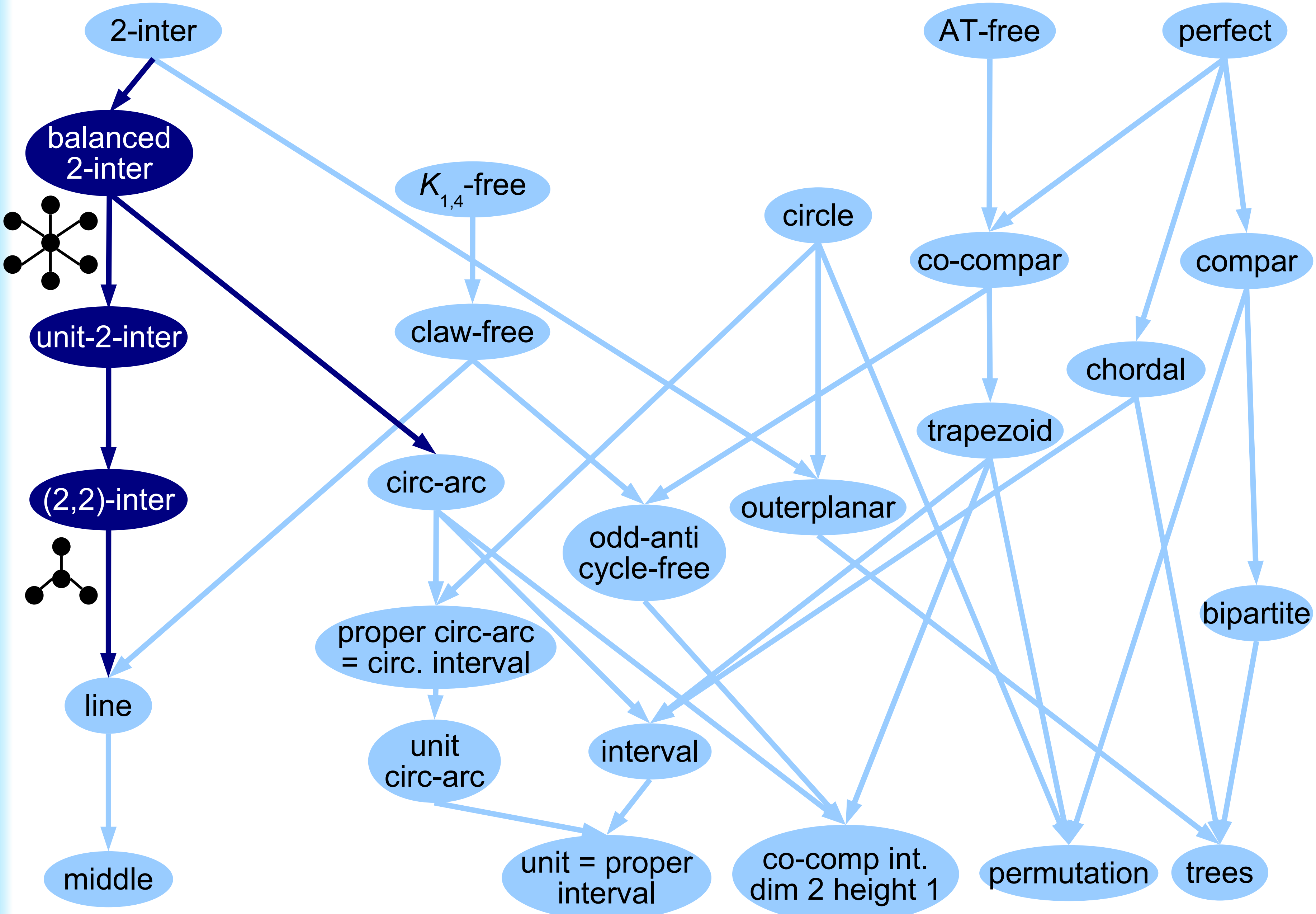




Inclusion des classes de graphes



Inclusion des classes de graphes



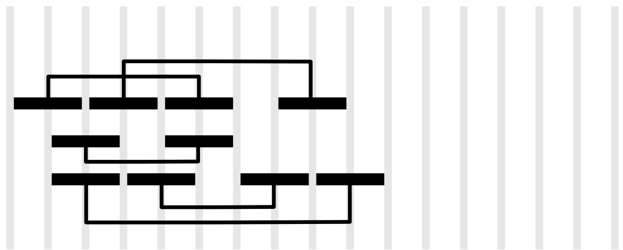
Graphes (x,x)-intervallaires

La classe des (x,x)-intervallaires est strictement incluse dans celle des (x+1,x+1)-intervallaires, pour x>1.

Preuve de l'inclusion :

Comment transformer une **réalisation (x,x)-intervallaire** en **réalisation (x+1,x+1)-intervallaire** ?

On considère chaque intervalle séparément.



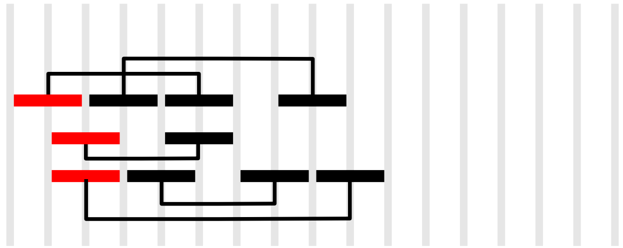
Graphes (x,x)-intervallaires

La classe des (x,x)-intervallaires est strictement incluse dans celle des (x+1,x+1)-intervallaires, pour x>1.

Preuve de l'inclusion :

Comment transformer une **réalisation (x,x)-intervallaire** en **réalisation (x+1,x+1)-intervallaire** ?

On considère chaque intervalle séparément.



Prenons le plus à gauche et ceux qu'il intersecte

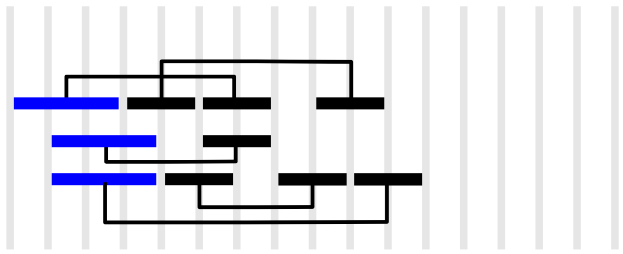
Graphes (x,x)-intervallaires

La classe des (x,x)-intervallaires est strictement incluse dans celle des (x+1,x+1)-intervallaires, pour x>1.

Preuve de l'inclusion :

Comment transformer une **réalisation (x,x)-intervallaire** en **réalisation (x+1,x+1)-intervallaire** ?

On considère chaque intervalle séparément.



On augmente leur longueur vers la droite, et on translate ceux à leur droite

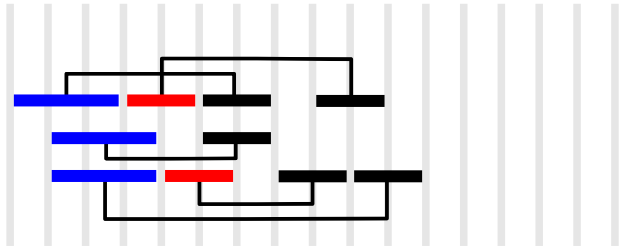
Graphes (*x*,*x*)-intervallaires

La classe des (*x*,*x*)-intervallaires est strictement incluse dans celle des (*x*+1,*x*+1)-intervallaires, pour x>1.

Preuve de l'inclusion :

Comment transformer une **réalisation (*x*,*x*)-intervallaire** en **réalisation (*x*+1,*x*+1)-intervallaire** ?

On considère chaque intervalle séparément.



Prenons le plus à gauche et ceux qu'il intersecte

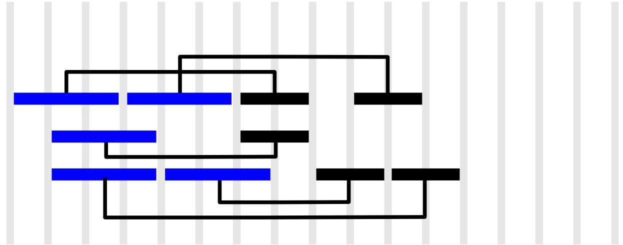
Graphes (x,x)-intervallaires

La classe des (x,x)-intervallaires est strictement incluse dans celle des (x+1,x+1)-intervallaires, pour x>1.

Preuve de l'inclusion :

Comment transformer une **réalisation (x,x)-intervallaire** en **réalisation (x+1,x+1)-intervallaire** ?

On considère chaque intervalle séparément.



On augmente leur longueur vers la droite, et on translate ceux à leur droite

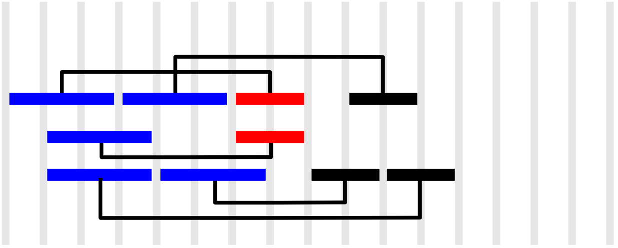
Graphes (x,x)-intervallaires

La classe des (x,x)-intervallaires est strictement incluse dans celle des (x+1,x+1)-intervallaires, pour x>1.

Preuve de l'inclusion :

Comment transformer une **réalisation (x,x)-intervallaire** en **réalisation (x+1,x+1)-intervallaire** ?

On considère chaque intervalle séparément.



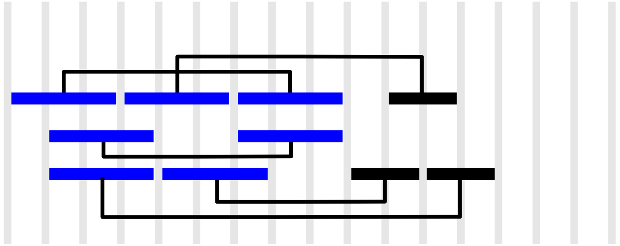
Graphes (x,x)-intervallaires

La classe des (x,x)-intervallaires est strictement incluse dans celle des (x+1,x+1)-intervallaires, pour x>1.

Preuve de l'inclusion :

Comment transformer une **réalisation (x,x)-intervallaire** en **réalisation (x+1,x+1)-intervallaire** ?

On considère chaque intervalle séparément.



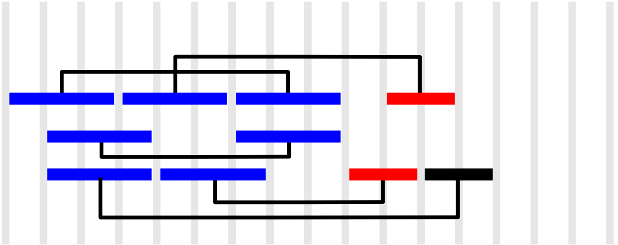
Graphes (x,x)-intervallaires

La classe des (x,x)-intervallaires est strictement incluse dans celle des (x+1,x+1)-intervallaires, pour x>1.

Preuve de l'inclusion :

Comment transformer une **réalisation (x,x)-intervallaire** en **réalisation (x+1,x+1)-intervallaire** ?

On considère chaque intervalle séparément.



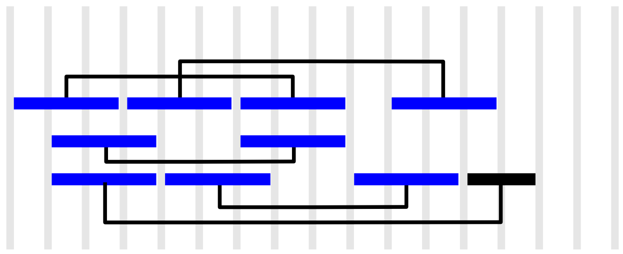
Graphes (x,x)-intervallaires

La classe des (x,x)-intervallaires est strictement incluse dans celle des (x+1,x+1)-intervallaires, pour x>1.

Preuve de l'inclusion :

Comment transformer une **réalisation (x,x)-intervallaire** en **réalisation (x+1,x+1)-intervallaire** ?

On considère chaque intervalle séparément.



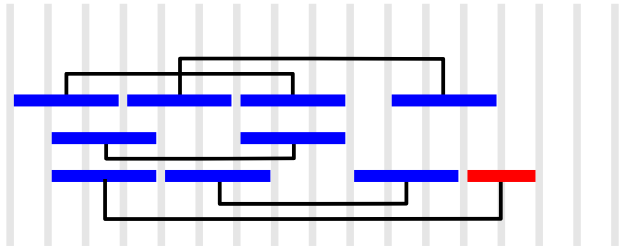
Graphes (x,x)-intervallaires

La classe des (x,x)-intervallaires est strictement incluse dans celle des (x+1,x+1)-intervallaires, pour x>1.

Preuve de l'inclusion :

Comment transformer une **réalisation (x,x)-intervallaire** en **réalisation (x+1,x+1)-intervallaire** ?

On considère chaque intervalle séparément.



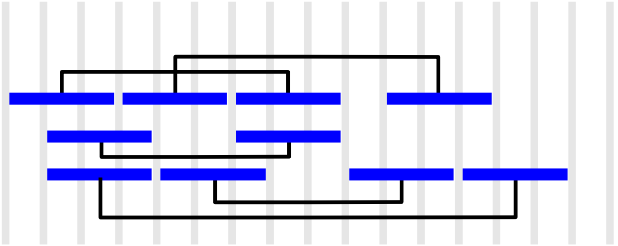
Graphes (x,x)-intervallaires

La classe des (x,x)-intervallaires est strictement incluse dans celle des (x+1,x+1)-intervallaires, pour x>1.

Preuve de l'inclusion :

Comment transformer une **réalisation (x,x)-intervallaire** en **réalisation (x+1,x+1)-intervallaire** ?

On considère chaque intervalle séparément.

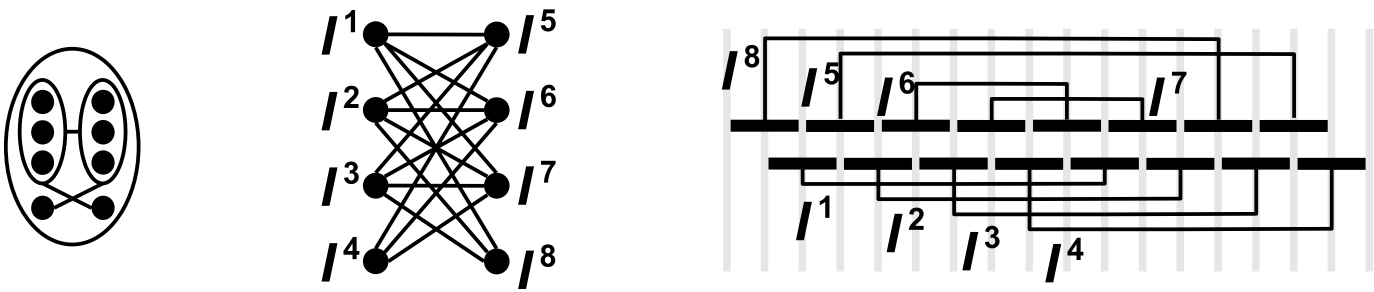


Graphes (x,x)-intervallaires

La classe des (x,x)-intervallaires est strictement incluse dans celle des (x+1,x+1)-intervallaires, pour x>1.

Preuve du “strictement” :

Gadget: $K_{4,4}$-e, toute réalisation 2-intervallaire de $K_{4,4}$-e est un **ensemble contigu d'intervalles**.



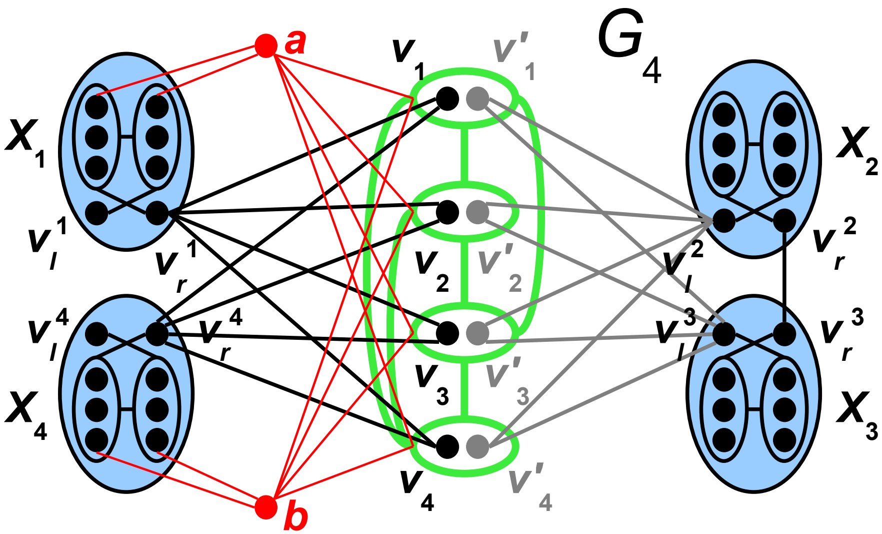
$K_{4,4}$-e a une **réalisation (2,2)-intervallaire** !

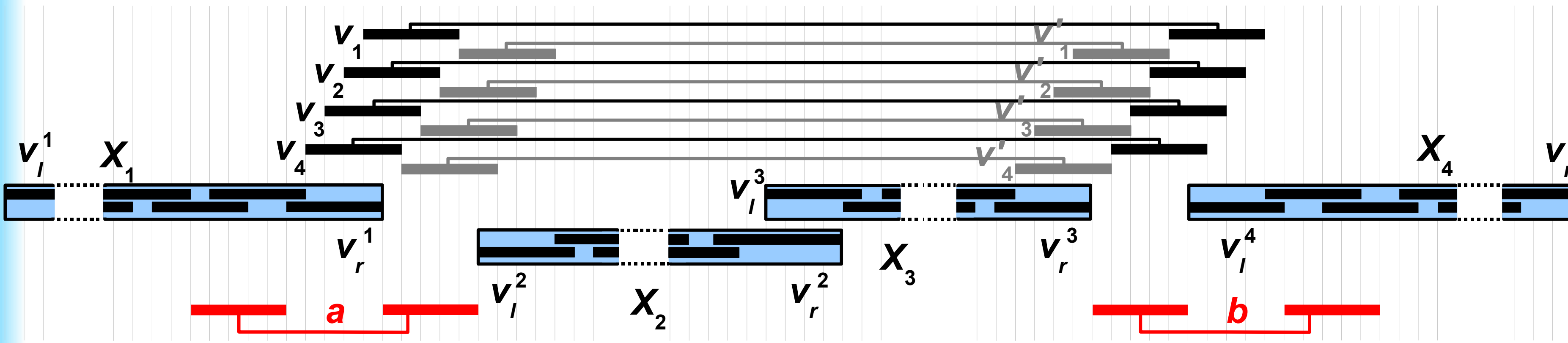
Graphes (x,x)-intervallaires

La classe des (x,x)-intervallaires est strictement incluse dans celle des (x+1,x+1)-intervallaires, pour x>1.

Idée de la preuve :

Pour x=4: toute réalisation 2-intervallaire de G_4 montre deux “escaliers” qui doivent avoir des “marches” de longueur au moins 5.





Graphes (x,x)-intervallaires

{2-intervallaires unitaires} = $\bigcup_{x>0}$ {(x,x)-intervallaires}

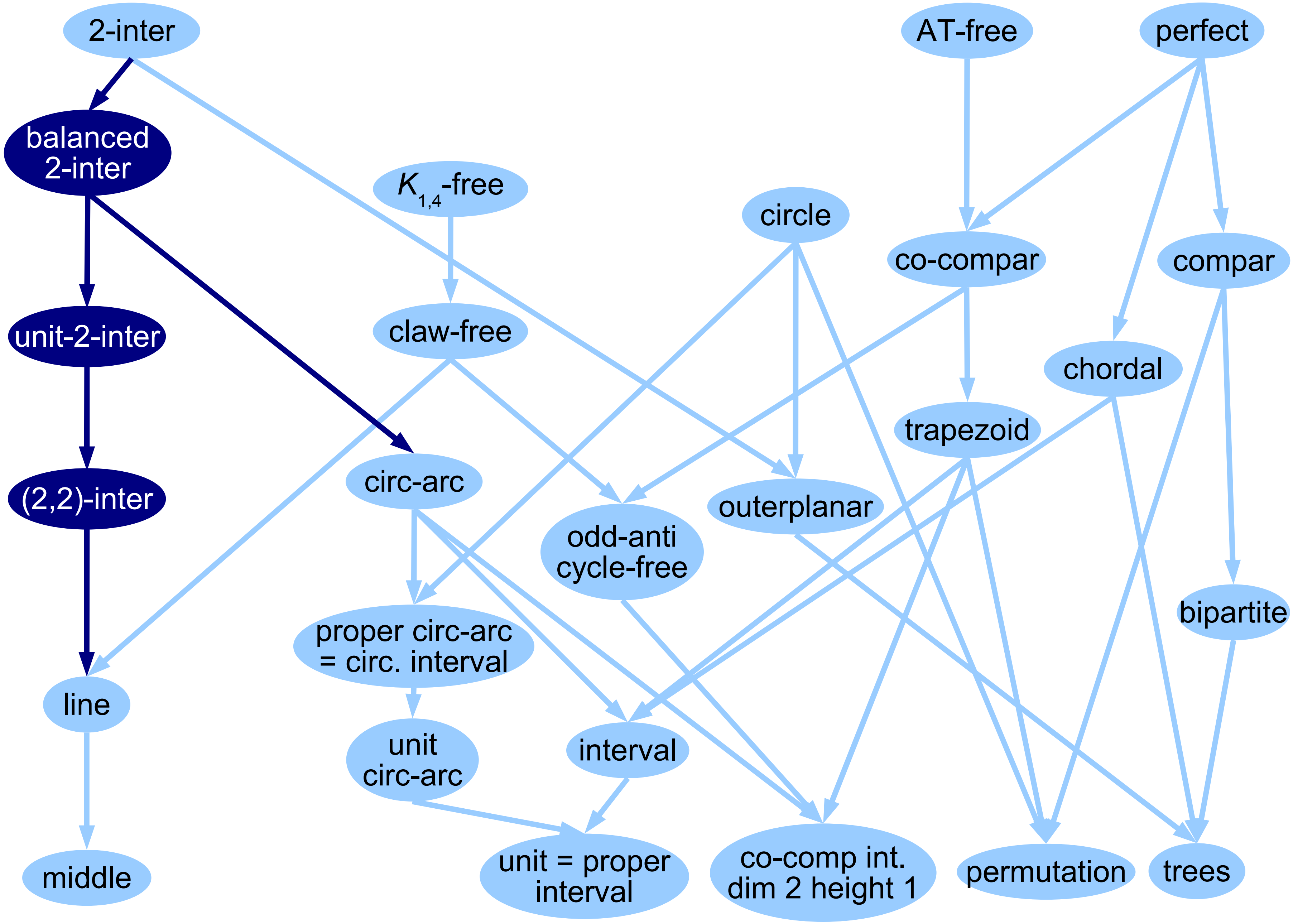
Preuve de l'inclusion :

Il existe un algorithme linéaire qui calcule une réalisation d'un graphes d'intervalles unitaires où les extrémités des intervalles sont rationnelles, de dénominateur $2n$ (Corneil et al, 1995).

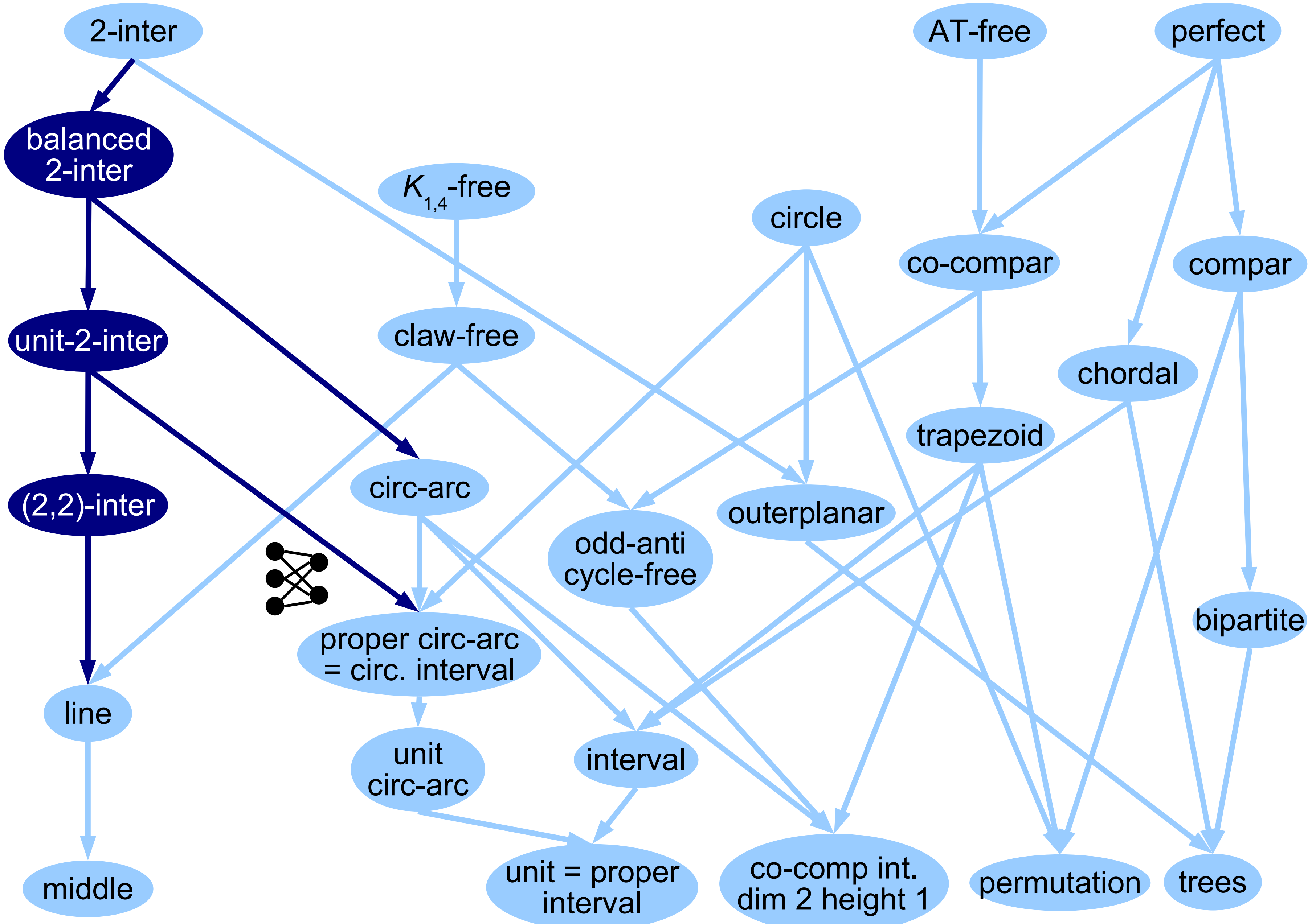
Corollaire:

Si reconnaître les (x,x)-intervallaires est polynomial pour tout x alors reconnaître les 2-intervallaires unitaires est aussi polynomial.

Inclusion des classes de graphes

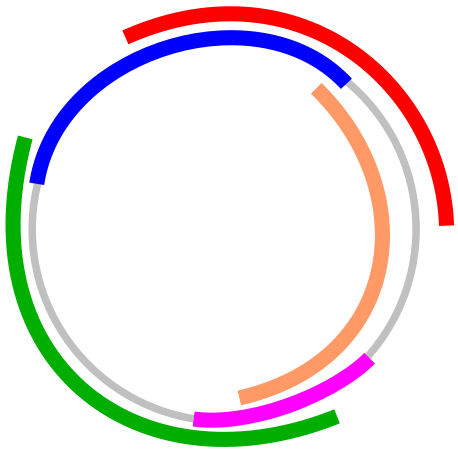


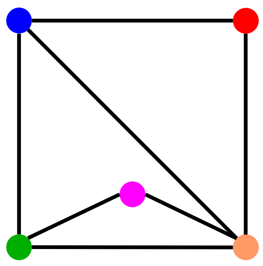
Inclusion des classes de graphes



Arcs-circulaires propres, 2-intervalles unitaires

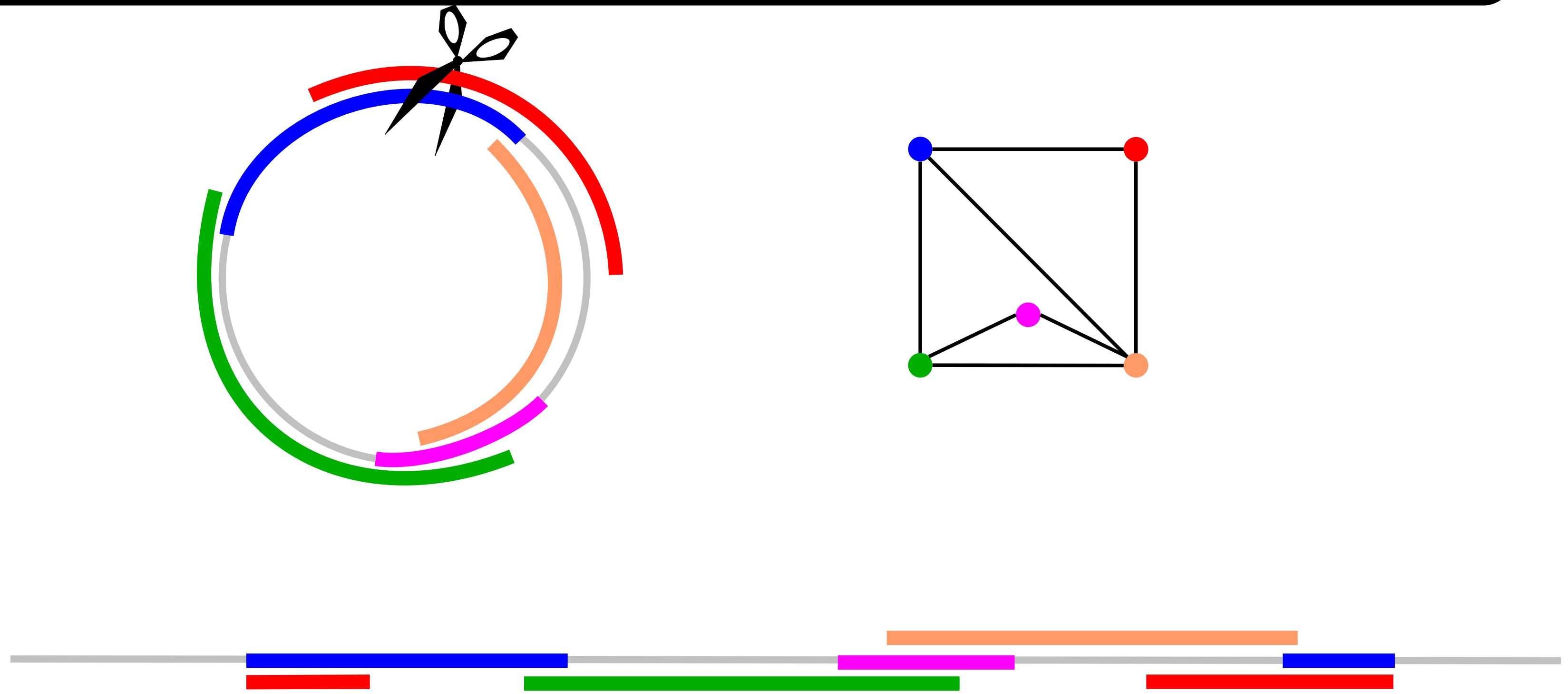
Les graphes d'arcs circulaires propres sont des graphes 2-intervallaires unitaires





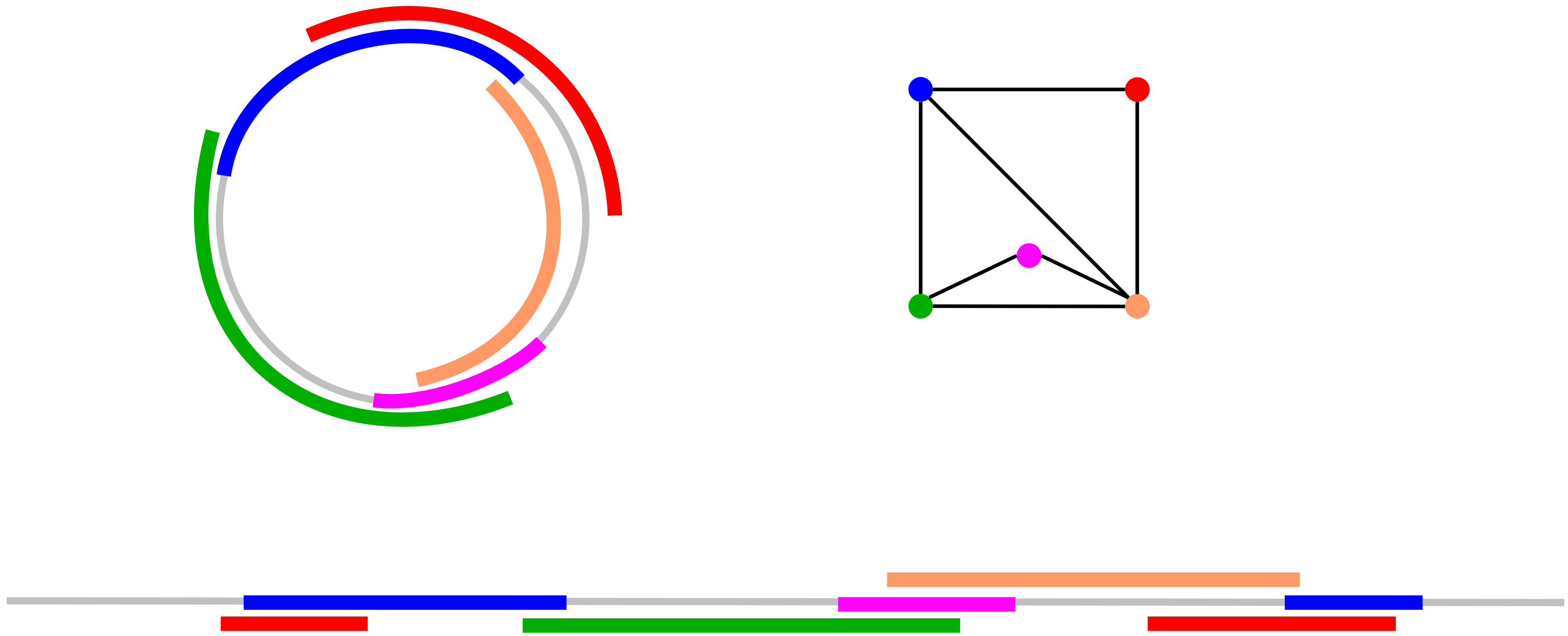
Arcs-circulaires propres, 2-intervalles unitaires

Les graphes d'arcs circulaires propres sont des graphes 2-intervallaires unitaires



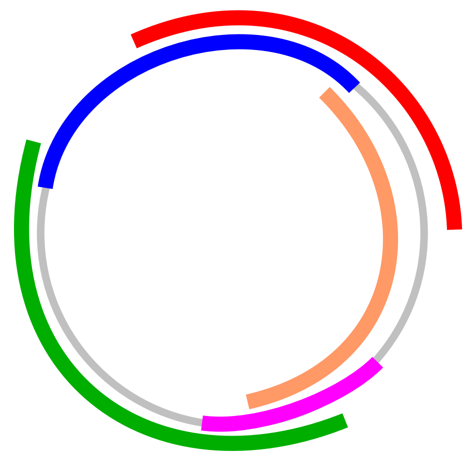
Arcs-circulaires propres, 2-intervalles unitaires

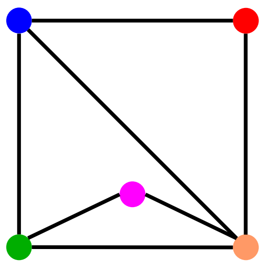
Les graphes d'arcs circulaires propres sont des graphes 2-intervallaires unitaires



Arcs-circulaires propres, 2-intervalles unitaires

Les graphes d'arcs circulaires propres sont des graphes 2-intervallaires unitaires

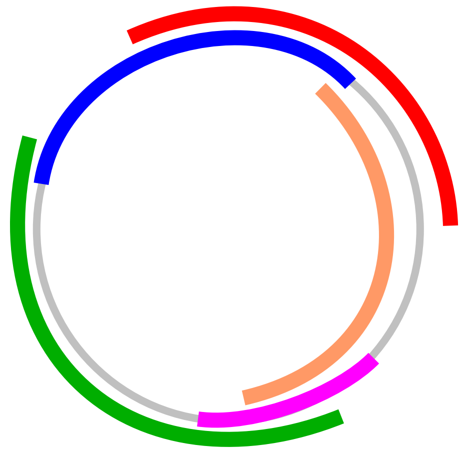


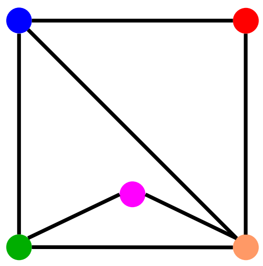


graphe d'intervalles propres =
graphe d'intervalles unitaires

Arcs-circulaires propres, 2-intervalles unitaires

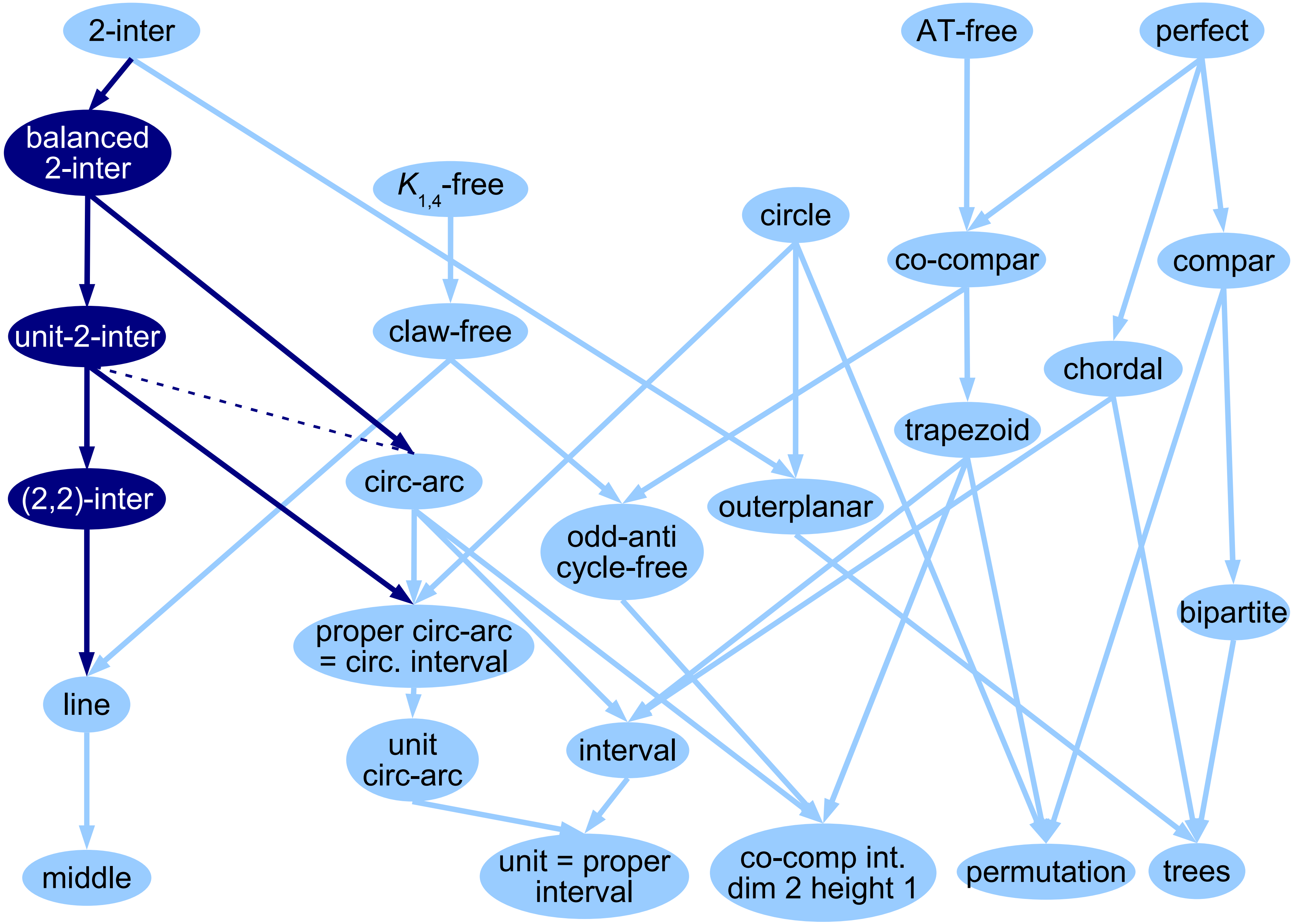
Les graphes d'arcs circulaires propres sont des graphes 2-intervallaires unitaires





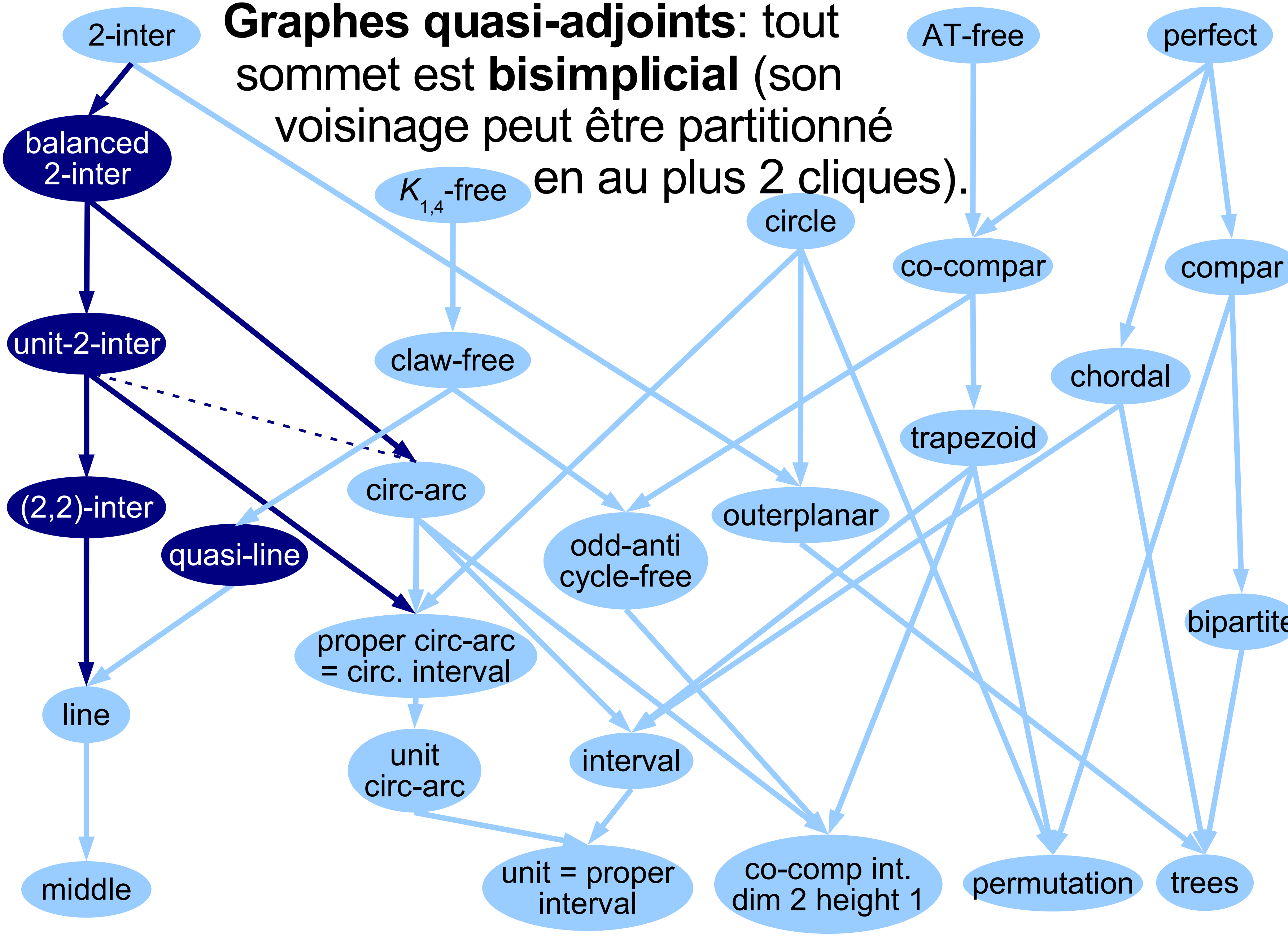
+ intervalles disjoints

Inclusion des classes de graphes



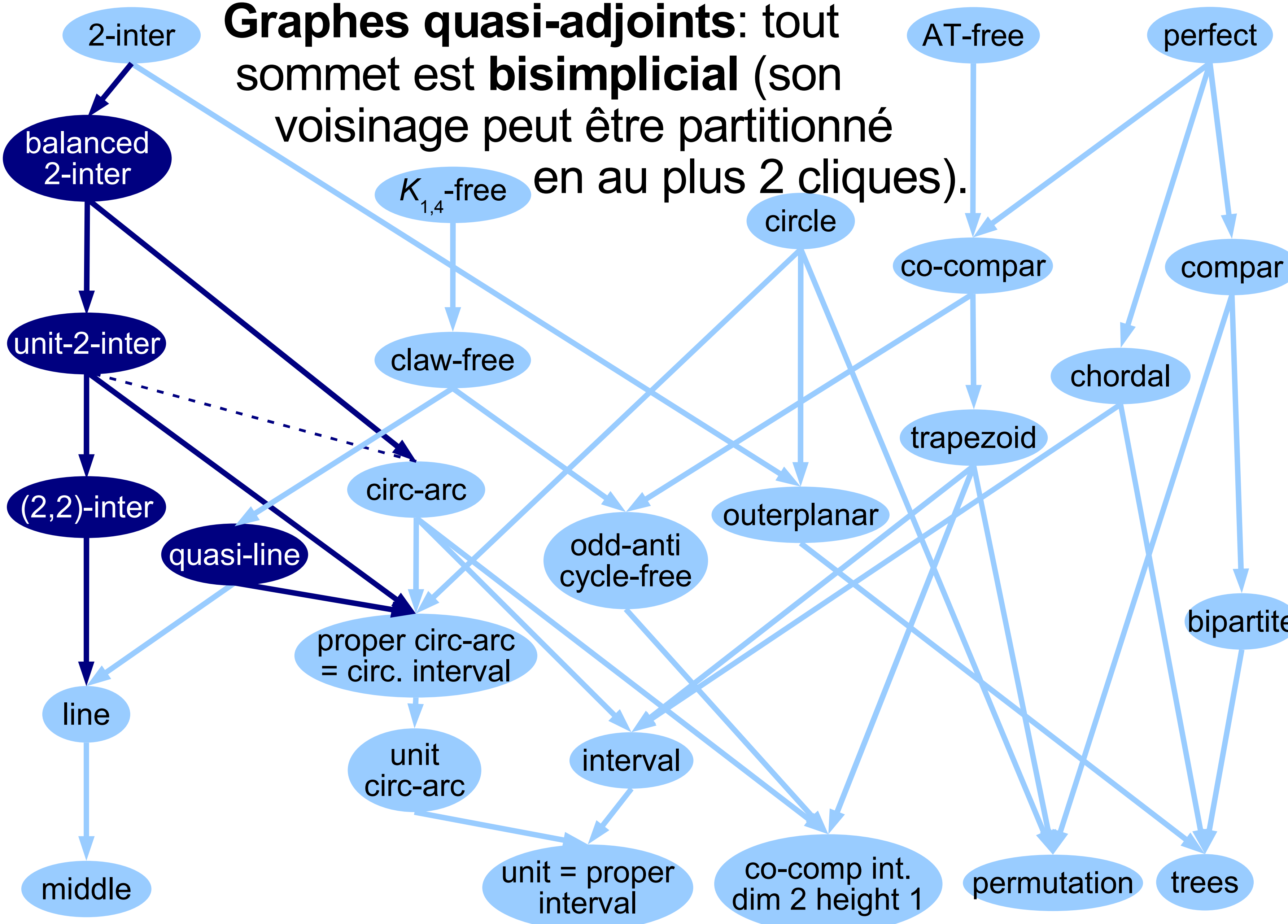
Inclusion des classes de graphes

Graphes quasi-adjoints: tout sommet est **bisimplicial** (son voisinage peut être partitionné en au plus 2 cliques).

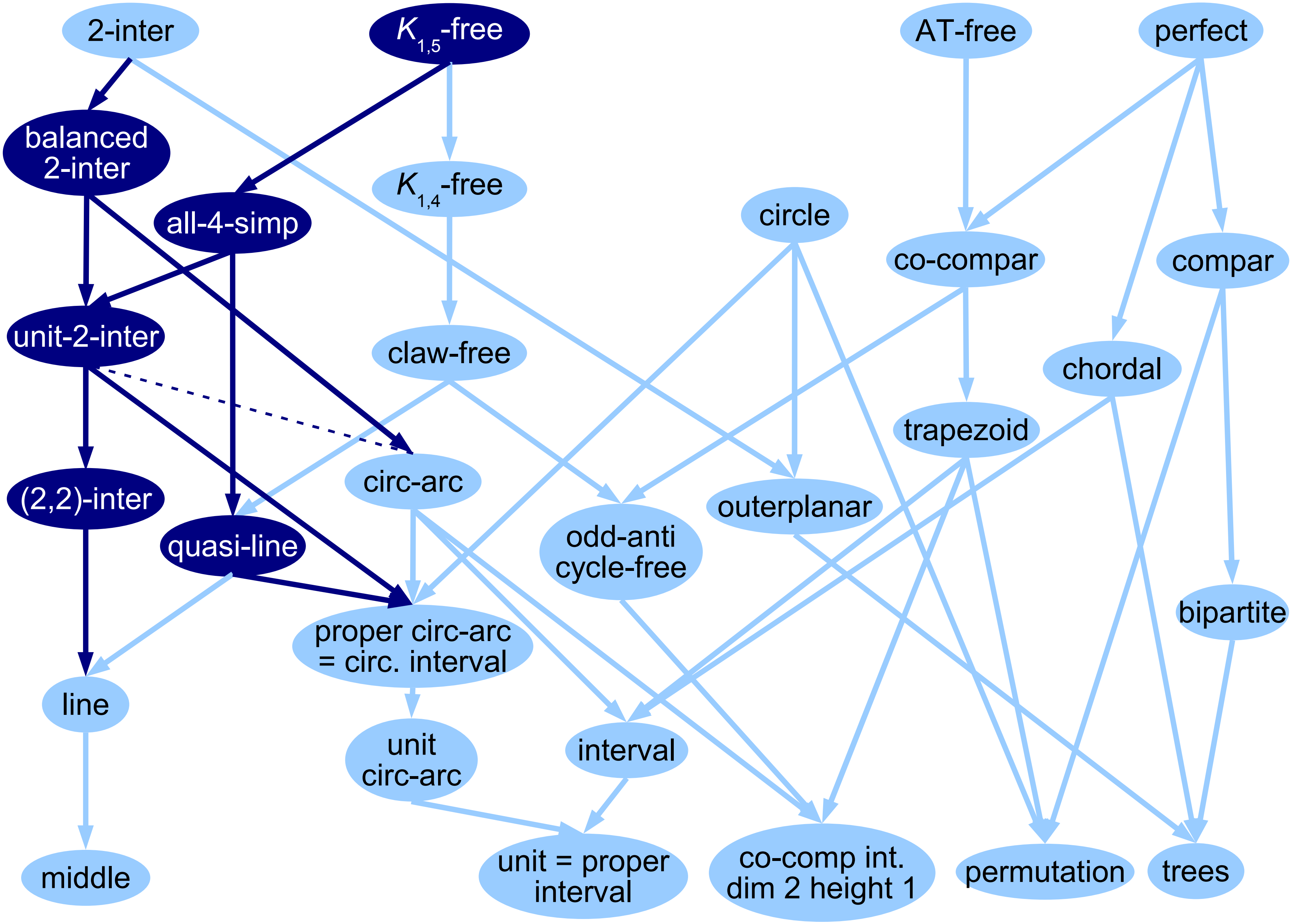


Inclusion des classes de graphes

Graphes quasi-adjoints: tout sommet est **bisimplicial** (son voisinage peut être partitionné en au plus 2 cliques).



Inclusion des classes de graphes



Reconnaissance des sommets-*k*-simpliciaux

Un graphe est **à sommets-*k*-simpliciaux** si le voisinage de tout sommet peut être partitionné en au plus *k* cliques.

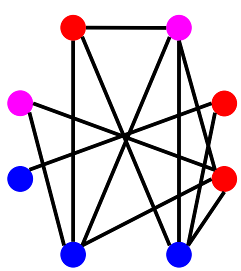
La reconnaissance des graphes à sommets-k-simpliciaux est NP-complète pour k>2.

Démo :

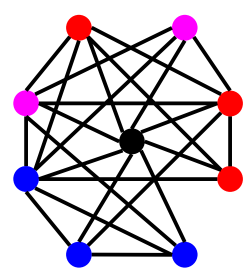
Réduction de *k*-coloration.

G *k*-colorable ssi *G'* à sommets-*k*-simpliciaux,

où *G'* est le graphe complémentaire de *G* augmenté d'un sommet universel.

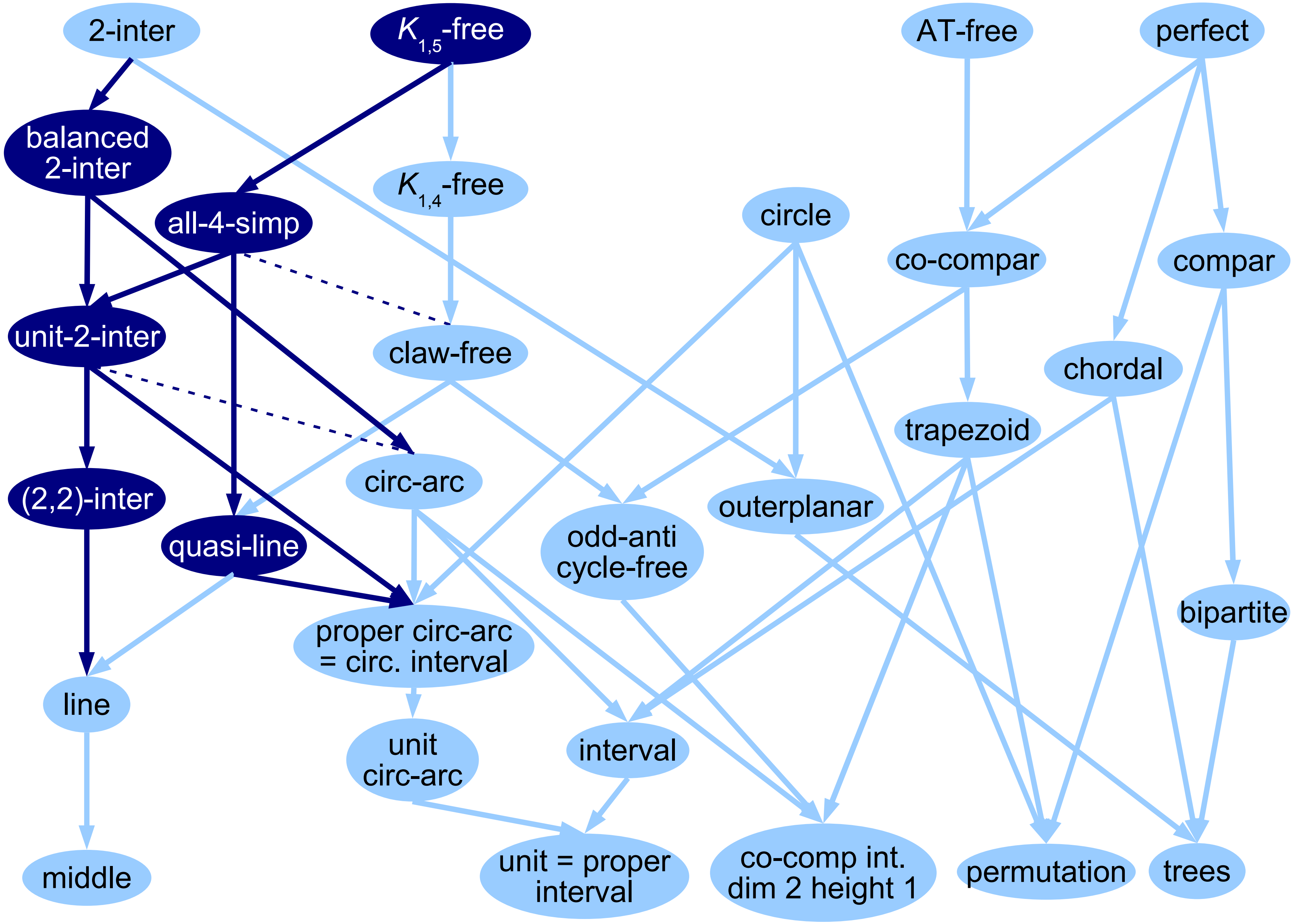


G



G'

Inclusion des classes de graphes



Reconnaissance des 2-intervallaires unitaires

Complexité toujours **ouverte**.

Algorithme et caractérisation pour les graphes bipartis :

Un graphe biparti est un graphe 2-intervallaire unitaire (et (2,2)-intervallaire) ssi il a degré maximum 4 et n'est pas 4-régulier.

Algorithme linéaire basé sur la découverte de chemins dans le graphe, avec des règles d'orientation et de recollement

Perspectives

Le problème de reconnaissance des graphes 2-intervallaires unitaires et (x,x)-intervallaires reste ouvert.

Le problème de la clique maximum reste ouvert sur les graphes 2-intervallaires et ses restrictions.

Utilisation pratique en bioinformatique ?