Graphes (2,2)-intervallaires bipartis

Philippe Gambette

Mise à jour février 2011 : ces résultats découlent en fait assez directement de l'article de Douglas West : "A short proof of the degree bound for interval number" Discrete Mathematics, 1989

Résumé

Les graphes (2,2)-intervallaires sont les graphes d'intersection d'union de 2 intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, disjoints, chacun de longueur 2, et à bornes entières. La complexité de la reconnaissance des graphes (2,2)-intervallaires est un problème ouvert, on montre ici que le problème se résoud en temps polynomial sur les graphes bipartis.

Théorème 1. *Soit G un graphe biparti. G est un graphe (2,2)-intervallaire ssi il est de degré maximum 4 et qu'il n'a pas de sous-graphe induit 4-régulier.*

Démonstration. $\Rightarrow$: soit G un graphe biparti. Alors il a une réalisation (2,2)-intervallaire dans laquelle chaque 2-intervalle intersecte des 2-intervalles disjoints. Or chaque 2-intervalle étant composé de deux intervalles de longueur 2, et une intersection entre deux 2-intervalles ayant au moins longueur 1, il intersecte au plus quatre 2-intervalles disjoints. Ainsi chaque sommet a degré inférieur ou égal à quatre.

Supposons maintenant par l'absurde que G a un sous-graphe induit 4-régulier $G[V']$. Considérons parmi les sommets de V' celui dont le 2-intervalle I^g dans la réalisation de G a son intervalle gauche le plus à gauche. Alors cet intervalle n'intersecte pas sur sa gauche de 2-intervalle de V', donc I^g intersecte au plus trois 2-intervalles correspondant aux sommets de V'. Or il est adjacent de 4 sommets de V' : contradiction !

Ainsi tout graphe (2,2)-intervallaire biparti a degré maximum inférieur ou égal à 4 et n'a pas de sous-graphe induit 4-régulier.

$\Leftarrow$: soit G un graphe biparti de degré maximum 4 et sans sous-graphe 4-régulier. On construit ci-dessous une réalisation (2,2)-intervallaire de G, illustrée en figure 1.

On commence par effectuer une couverture des arêtes de G par des chemins C_i, par un parcours visitant exactement une fois chaque arête, de la façon suivante : tant qu'il reste des arêtes non visitées, construire un nouveau chemin C_i. Pour ce faire : choisir comme arête courante une arête (v_1, v_2) non visitée, initialiser C_i à la liste $[v_1, v_2]$ et tant que l'arête courante $(\bullet, v)$ a une arête adjacente (v, w) non encore visitée, ajouter le sommet w à C_i et définir (v, w) comme l'arête courante.

On obtient donc ainsi pour les C_i un ensemble de chemins passant chacun au plus une fois par chaque arête. Pour toute arête (v_1, v_2) de G, il existe un unique chemin contenant v_1 et v_2 consécutifs à une unique position. Réciproquement pour tous sommets consécutifs v_1 et v_2 dans un chemin C_i, v_1 et v_2 sont adjacents dans G.

Chaque C_i peut contenir plusieurs fois un même sommet v. A chaque fois que v a été ajouté à C_i :

- soit v est le sommet initial de C_i (et lorsqu'il a été ajouté à C_i, une arête incidente à v a été visitée),

– soit v est un sommet adjacent à deux arêtes visitées consécutivement lors de la construction de C_i,
– soit v est le sommet final de C_i (et lorsqu'il a été ajouté à C_i, une arête incidente à v a été visitée).

Or v est de degré 4, donc v apparaît trois fois dans C_i seulement s'il apparaît en première, en dernière position, et au milieu de C_i (c'est à dire $C_i = [v \dots v \dots v]$). Sinon il apparaît deux fois ou moins. Dans les cas où C_i est de la forme $[v \dots v]$, on dit que C_i est un circuit, sinon on dit que c'est une chaîne.

Considérons alors que tant qu'il existe deux chaînes ayant une extrémité en commun, on les fusionne de la façon suivante :
– on fusionne $[v_1, v_2, \dots, v_k]$ avec $[v_k, v'_2, \dots, v'_m]$ pour obtenir la chaîne $[v_1, v_2, \dots, v_k, v'_2, \dots, v'_m]$,
– on fusionne $[v_1, v_2, \dots, v_k]$ avec $[v_1, v'_2, \dots, v'_m]$ pour obtenir la chaîne $[v_k, \dots, v_2, v_1, v'_2, \dots, v'_m]$,
– on fusionne $[v_1, v_2, \dots, v_k]$ avec $[v'_1, v'_2, \dots, v'_m, v_k]$ pour obtenir la chaîne $[v_1, v_2, \dots, v_k, v'_m, \dots, v'_2, v'_1]$.

De même, tant qu'il existe deux circuits avec un sommet en commun, on les fusionne de la façon suivante :
– les circuits $[v_1, v_2, \dots, v_k, v_1]$ et $[v_1, v'_2, \dots, v'_m, v_1]$ sont fusionnés pour créer le circuit $[v_1, v_2, \dots, v_k, v_1, v'_2, \dots, v'_m, v_1]$,
– les circuits $[v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_k, v_1]$ et $[v_i, v'_2, \dots, v'_m, v_i]$ sont fusionnés pour créer le circuit $[v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v'_2, \dots, v'_m, v_i, v_{i+1}, \dots, v_k, v_1]$,
– les circuits $[v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_k, v_1]$ et $[v'_1, v'_2, \dots, v'_{j-1}, v_i, v'_{j+1}, \dots, v'_m, v'_1]$ sont fusionnés pour créer le circuits $[v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v'_{j+1}, \dots, v'_m, v'_1, v'_2, \dots, v'_{j-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_k, v_1]$.

De même, tant qu'il existe un circuit dont un des sommets appartient aussi à une chaîne, on fusionne le circuit à l'intérieur de la chaîne :
– le circuit $[v'_1, \dots, v'_j, v_i, v'_{j+1}, \dots, v'_m, v'_1]$ et la chaîne $[v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_k]$ sont fusionnés pour créer la chaîne $[v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v'_{j+1}, \dots, v'_m, v'_1, \dots, v'_j, v_i, v_{i+1}, \dots, v_k]$,
– le circuit $[v_i, v'_2, \dots, v'_m, v_i]$ et la chaîne $[v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_k]$ sont fusionnés pour créer la chaîne $[v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v'_2, \dots, v'_m, v_i, v_{i+1}, \dots, v_k]$.

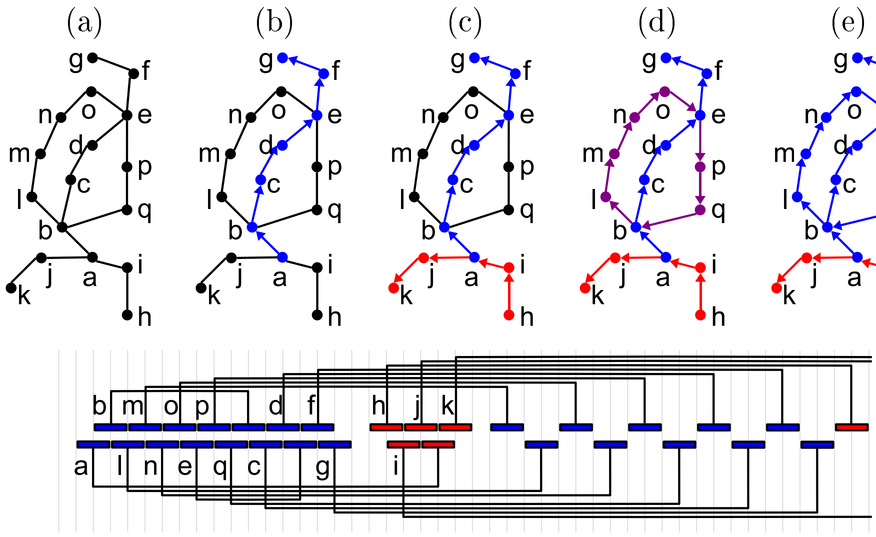
Montrons qu'après ces opérations de fusion, chaque circuit contient au moins un sommet n'apparaissant pas dans les autres chemins, et apparaissant dans ce circuit une seule fois en position interne, ou bien seulement en première et dernière position. Supposons par l'absurde que ce n'est pas le cas, alors il existe un circuit C où tout sommet ne vérifie pas les propriétés voulues. Soit V' les sommets de G apparaissant dans C. Considérons un sommet v quelconque de V'. Si v apparaît dans un autre chemin alors C aurait dû être fusionné avec ce chemin, que ce soit un circuit ou une chaîne. Ainsi, v apparaît seulement dans C. Comme il ne vérifie pas les propriétés voulues, alors deux cas se présentent :
– soit v apparaît en première et dernière position, ainsi qu'en position interne : alors $C = [v, v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_k, v]$, et donc v voisin de v_1, v_{i-1}, v_{i+1}, v_k (qui sont tous des sommets différents, sinon cela signifierait que le chemin C est passé deux fois par une même arête) donc v de degré 4 dans $G[V']$.
– soit v apparaît deux fois en position interne, alors $C = [v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v, v_{j+1}, \dots, v_k]$, alors v voisin de v_{i-1}, v_{i+1}, v_{j-1}, et v_{j+1} qui sont tous différents, donc v est de degré 4 dans $G[V']$.

Ainsi, on montre que dans tous les cas tout sommet de V' est de degré 4 dans $G[V']$, donc $G[V']$ est un sous graphe induit de G 4-régulier : contradiction ! Ainsi tout circuit contient bien un sommet qui n'apparaît qu'une fois, ou seulement au début et à la fin, et n'apparaît dans aucun autre chemin.

On transforme alors tout circuit $[v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_k, v_1]$ où un sommet v_i n'apparaît qu'une seule fois, en $[v_i, v_{i+1}, \ldots, v_k, v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_i]$.

Après ces transformations, le premier sommet de tout circuit n'apparaît que deux fois dans ce circuit (aussi en dernière position) et n'apparaît dans aucun autre chemin. D'autre part les sommets internes, et les sommets extrêmes des chaînes n'apparaissent que deux fois au plus dans l'ensemble des chemins (sinon ils seraient de degré supérieur à 4). Ainsi, tout sommet de G apparaît au plus deux fois dans l'ensemble des chemins obtenu.

Cet ensemble de chemins peut donc être facilement transformé en réalisation $(2,2)$-intervallaire. En appelant m la taille maximale des chemins, à tout chemin $C_i = [v_1, \ldots, v_k]$ (même si $v_1 = v_k$), on associe l'ensemble des intervalles $\{[i(m+2)+1, i(m+2)+3], \ldots, [i(m+2)+k, i(m+2)+k+2]\}$, chaque intervalle étiqueté par un même sommet apparaissant au plus deux fois. Puis on ajoute des intervalles disjoints de tous les autres pour "compléter les 2-intervalles" des sommets apparaissant moins de deux fois dans l'ensemble des chemins. $\square$



(f)

FIG. 1 – Un graphe biparti (a) qu'on parcourt pour recouvrir toutes ses arêtes par des chemins $C_1 = [a, b, c, d, e, f, g]$ (b), $C_2 = [h, i, a, j, k]$ (c) et $C_3 = [n, o, e, p, q, b, l, m, n]$ (d). C_1 et C_2 sont des chaînes, et C_3 un circuit, dont le sommet b apparaît aussi dans C_1, donc on fusionne C_3 dans C_1 pour obtenir $[a, b, l, m, n, o, e, p, q, b, c, d, e, f, g]$ (e). Les deux chemins finalement obtenus permettent de placer des chaînes d'intervalles, qu'on complète avec des intervalles disjoints pour obtenir une (2,2)-réalisation du graphe (f).

Corollaire 1. *Soit $G = (V, E)$ un graphe biparti. On peut déterminer en temps linéaire s'il est (2,2)-intervallaire.*

Démonstration. On commence par vérifier en temps linéaire que le graphe est de degré maximum 4. Si ce n'est pas le cas, il n'est pas (2,2)-intervallaire.

Si c'est le cas, supposons qu'il ait un sous-graphe induit $G[V']$ 4-régulier. Alors tout sommet de V' a quatre voisins dans V', et il est de degré maximal 4, donc n'a pas de voisin dans $G[V \setminus V']$. Ainsi $G[V']$ est une composante connexe 4-régulière, ou une union disjointe de composantes connexes 4-régulières.

Si l'on est assuré que G est de degré maximum 4, il reste donc à tester s'il a une composante connexe 4-régulière (faisable en temps linéaire) pour déterminer s'il est (2,2)-intervallaire. $\square$