Stage de Master M2

Les graphes 2-intervallaires

Philippe Gambette
Sous la direction de Michel Habib
(LIAFA)

http://philippe.gambette.free.fr/LIAFA

LIAFA

Université Paris VII

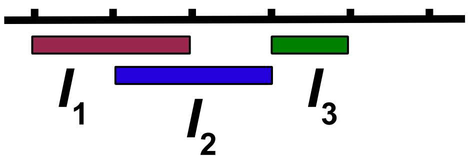
Plan

- Graphes d'intersection et 2-intervallaires.
- Quelques motivations
- Problème du stable maximum
- Classes reliées à celle des graphes 2-intervallaires
- Graphes 2-intervallaires équilibrés
- Séquences arc-annotées
- Graphes $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires

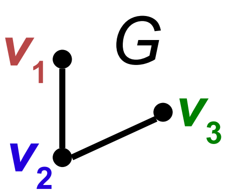
Les graphes d'intersection

$\mathcal{I}$ = {[0,2],[1,3],[3,4]}

des **noeuds** ⇔ des **ensembles**



une **arête** entre deux noeuds ⇔ les deux ensembles ont une **intersection non vide**



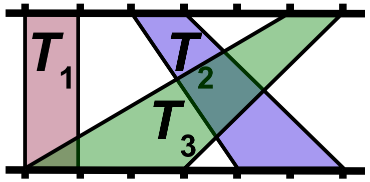
$\mathcal{I}$ est une **réalisation** du **graphe d'intersection** *G*.

G est un **graphe d'intervalles.**

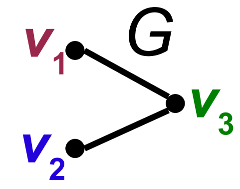
Les graphes d'intersection

$\mathcal{T} = \{([0,1],[0,1]), ([2,3],[4,6]), ([5,6],[0,3])\}$

des **noeuds** ⇔ des **ensembles**



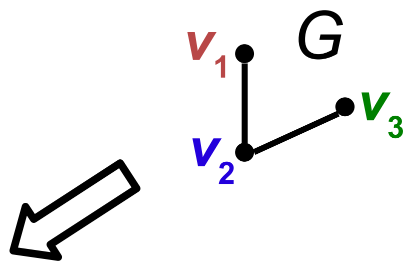
une **arête** entre deux noeuds ⇔ les deux ensembles ont une **intersection non vide**



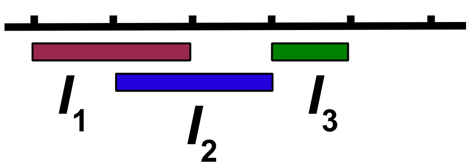
G est un ***graphe trapézoïdal.***

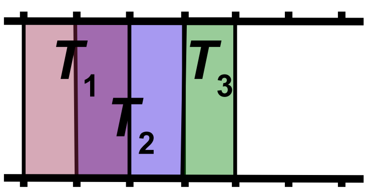
Classes de graphes

Tout graphe d'intervalles est un graphe trapézoïdal.



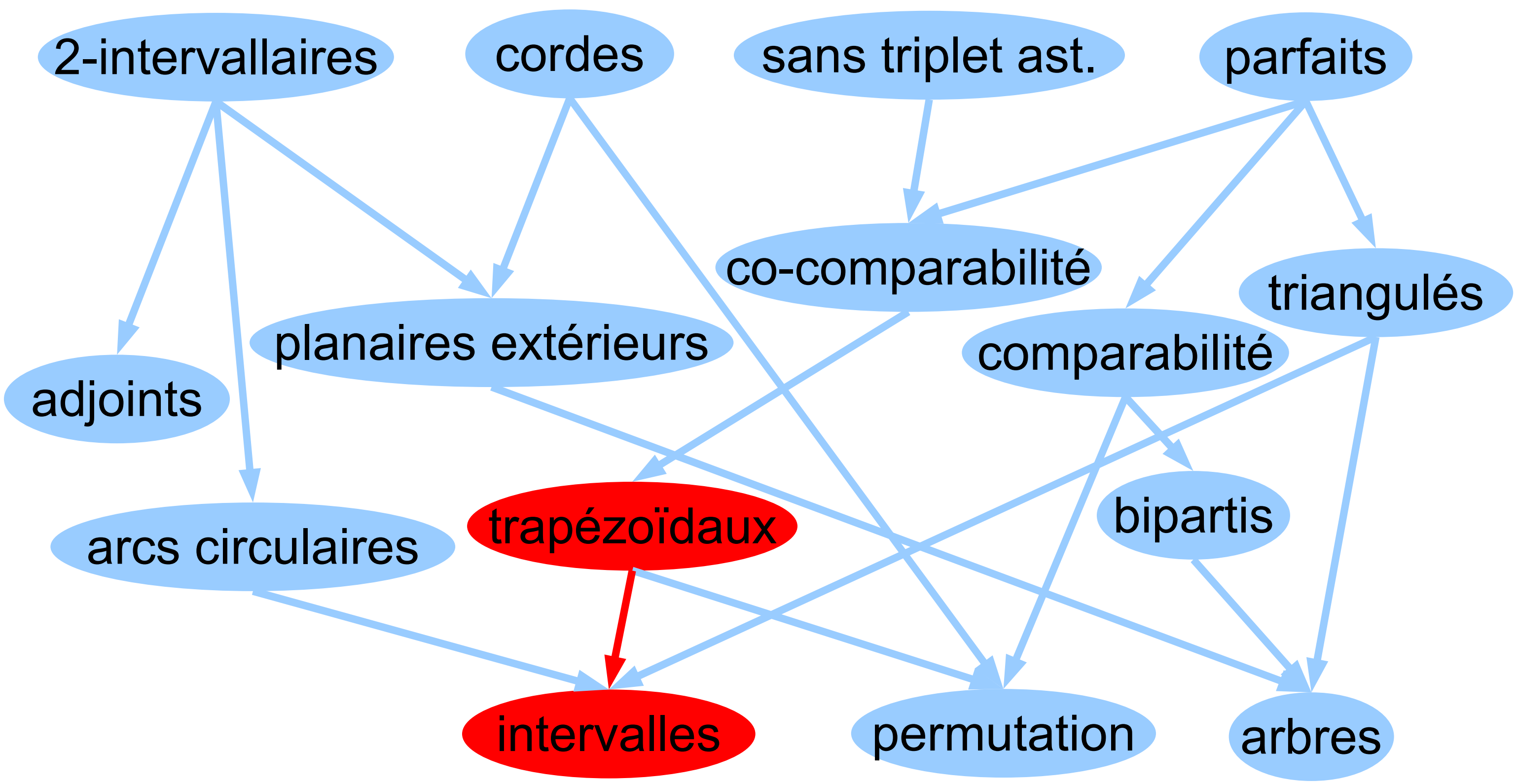
$\mathcal{I} = \{[0,2],[1,3],[3,4]\} \Rightarrow \mathcal{T} = \{([0,2],[0,2]),([1,3],[1,3]),([3,4],[3,4])\}$



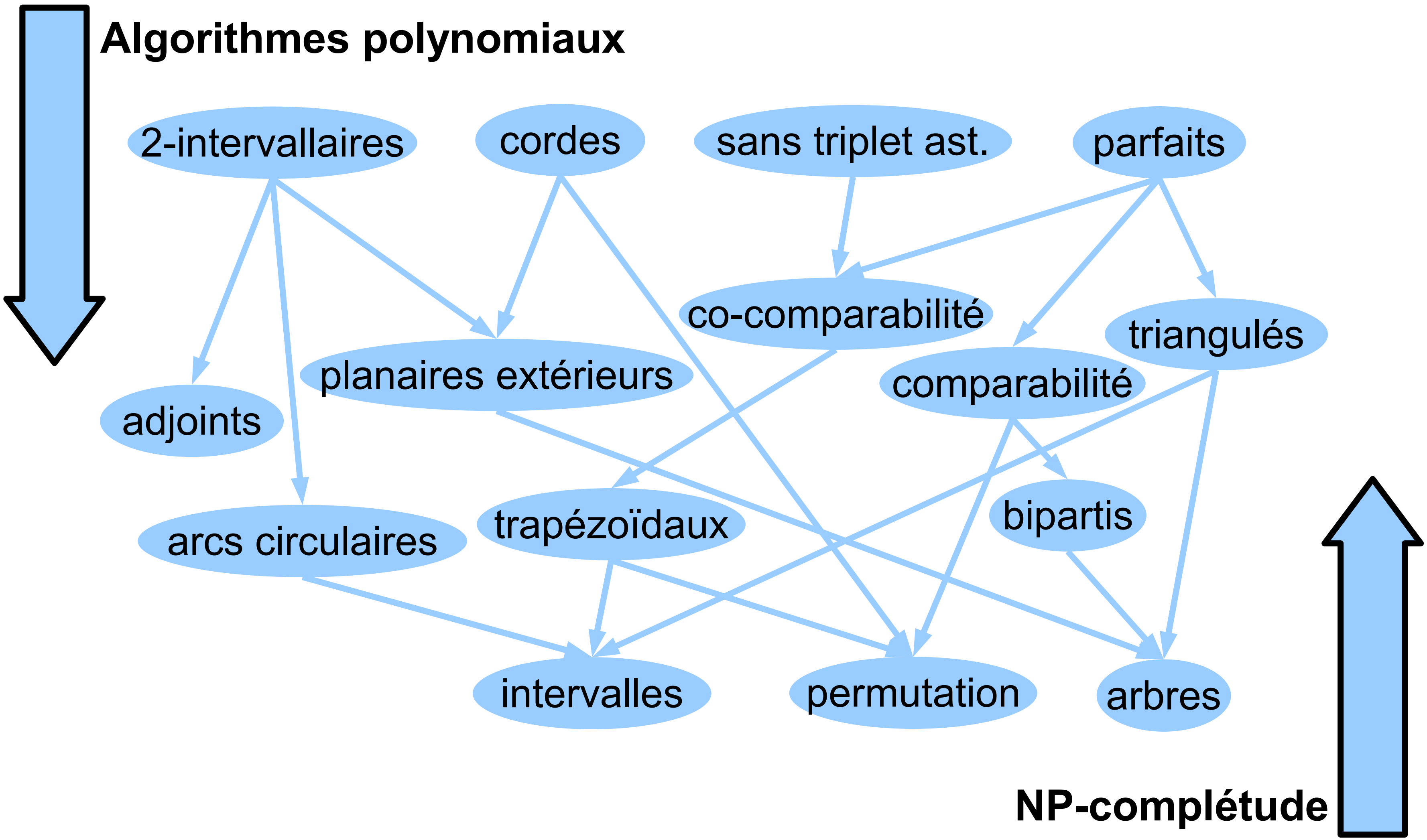


La **classe** de graphes d'intervalles **est incluse** dans celle des graphes trapézoïdaux.

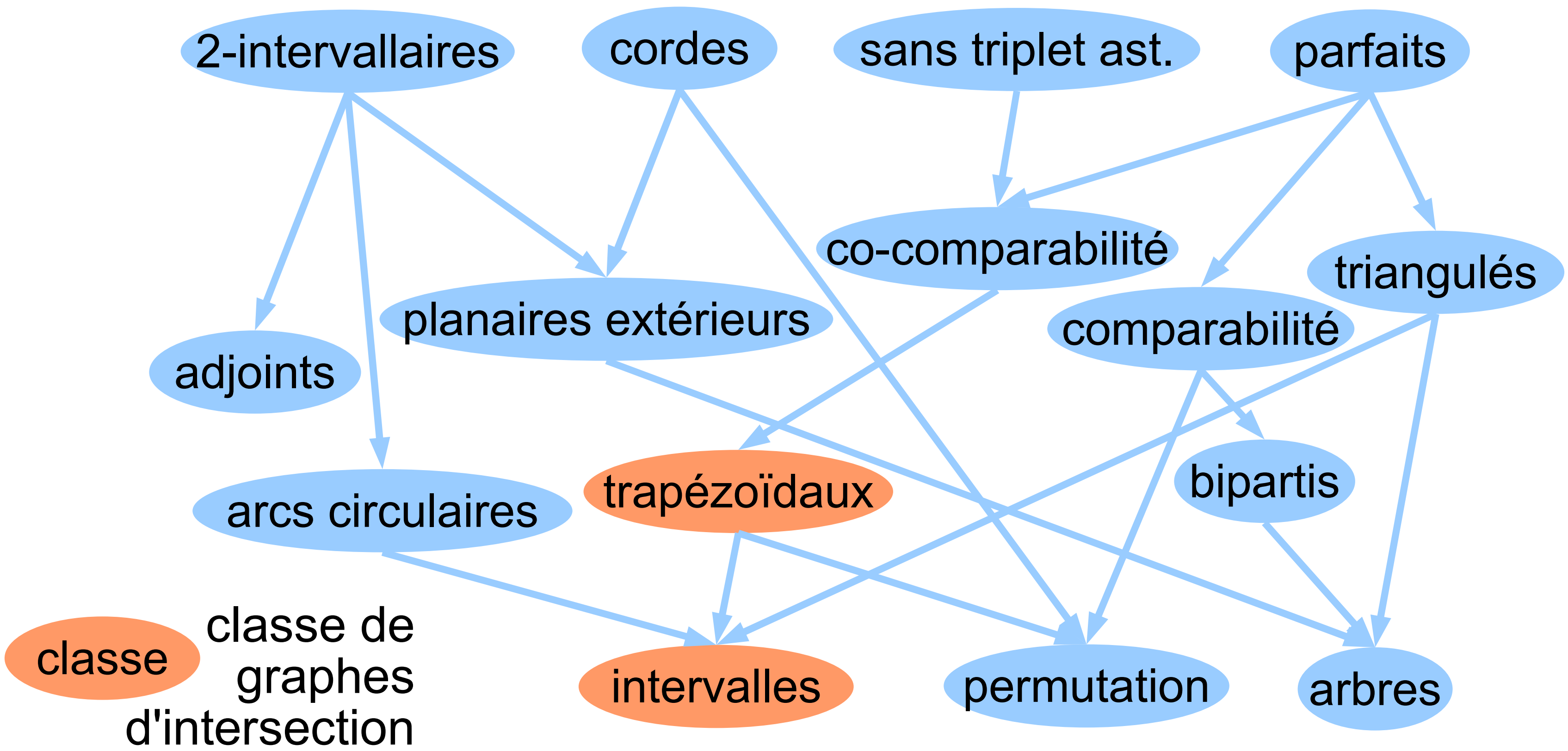
Graphe d'inclusion des classes de graphes



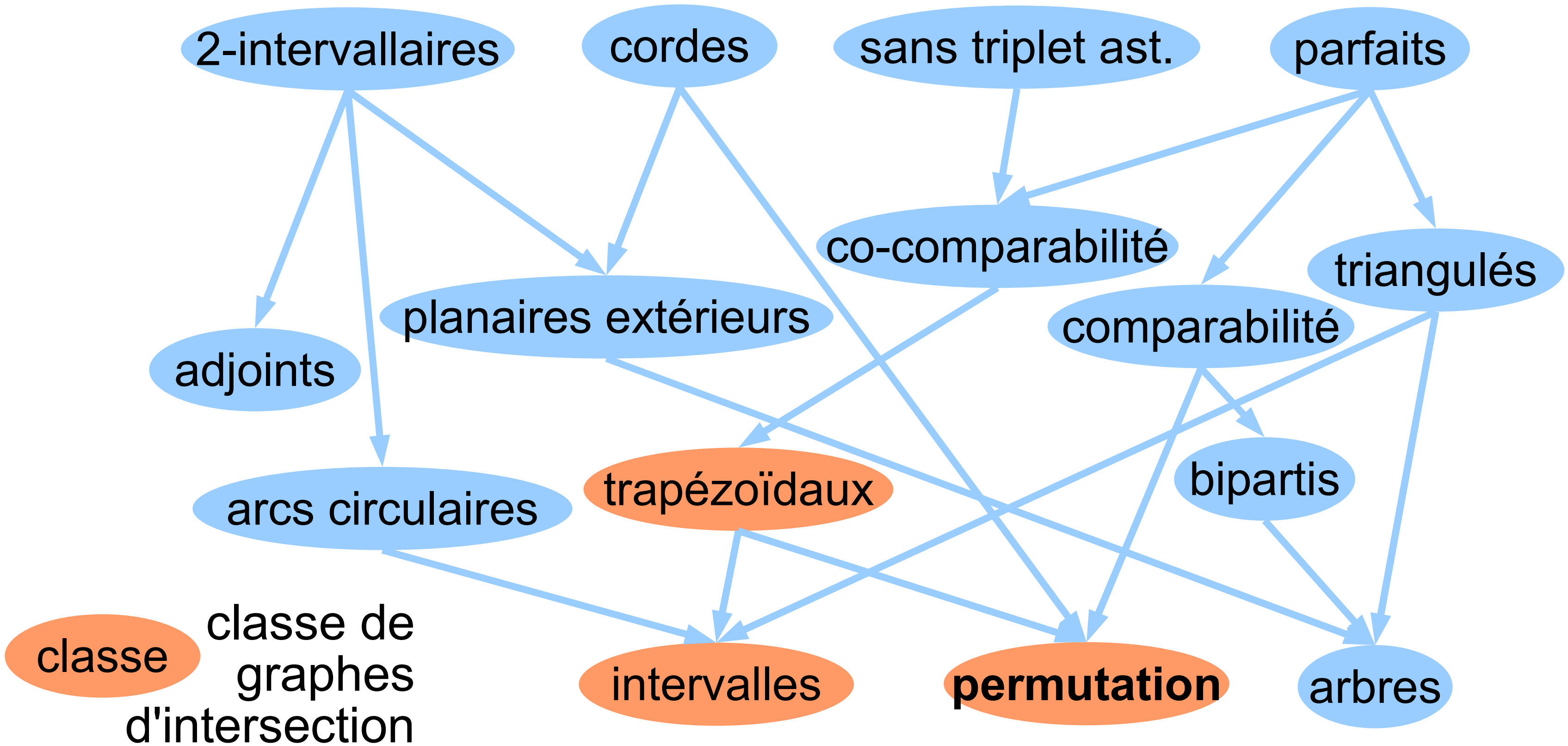
Graphe d'inclusion des classes de graphes



Graphe d'inclusion des classes de graphes

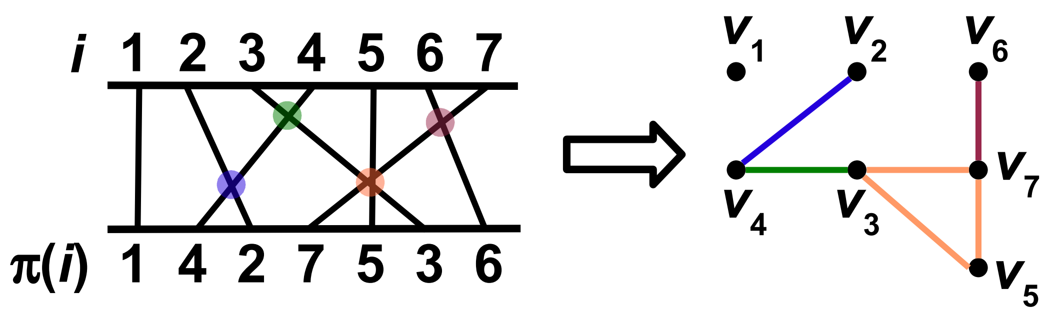


Graphe d'inclusion des classes de graphes

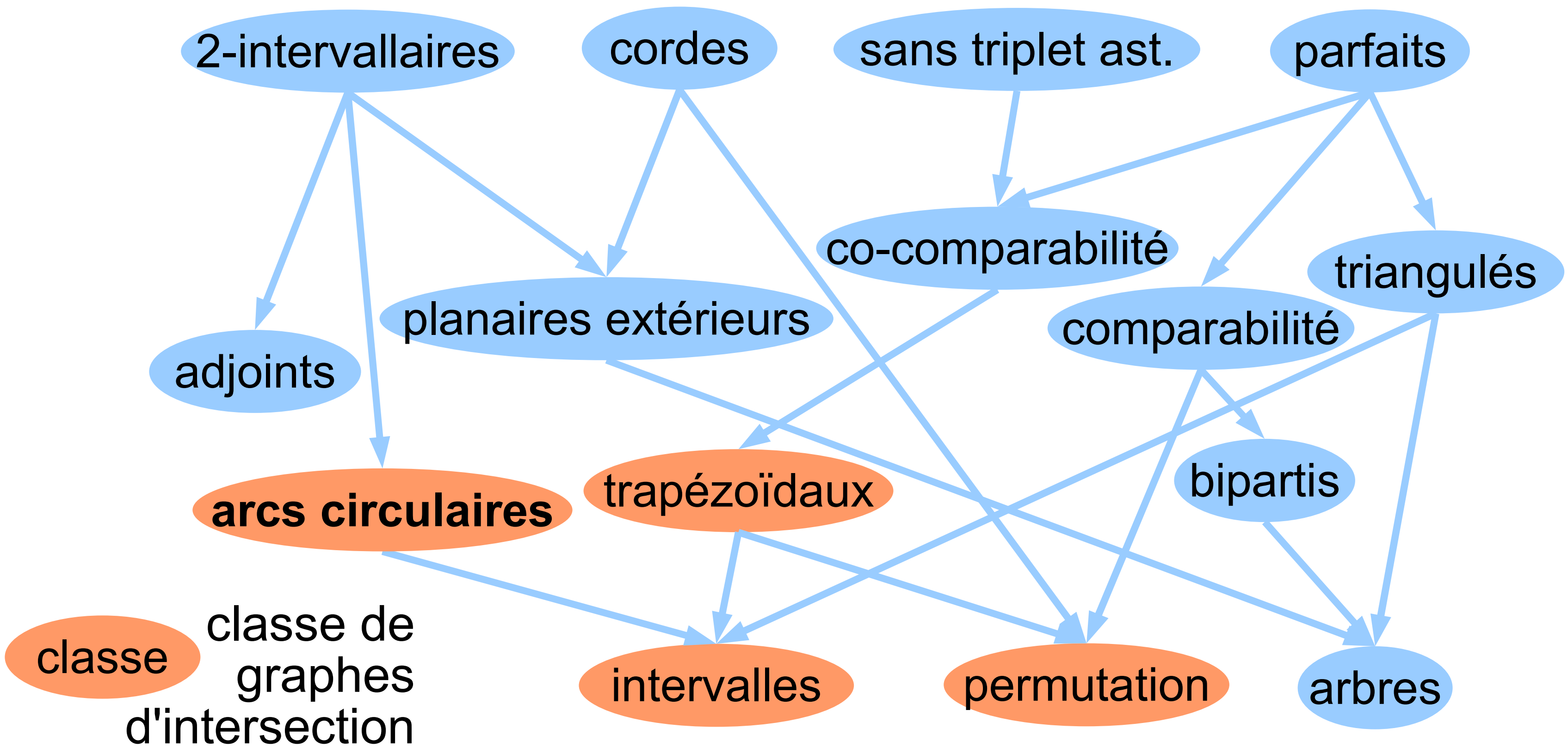


Graphe de **permutation** : graphe d'intersection des **segments (*k*,*k*)**.

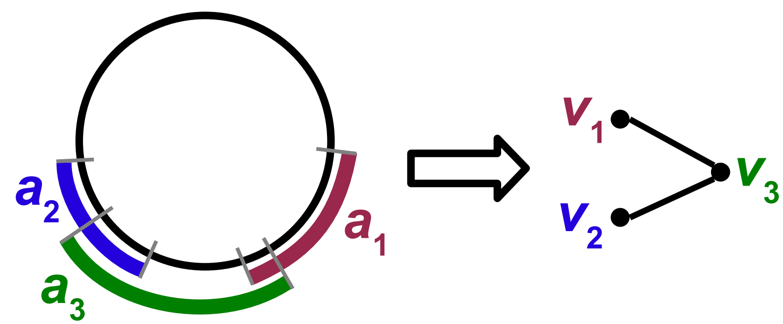
ligne des *i* ligne des π(*i*)



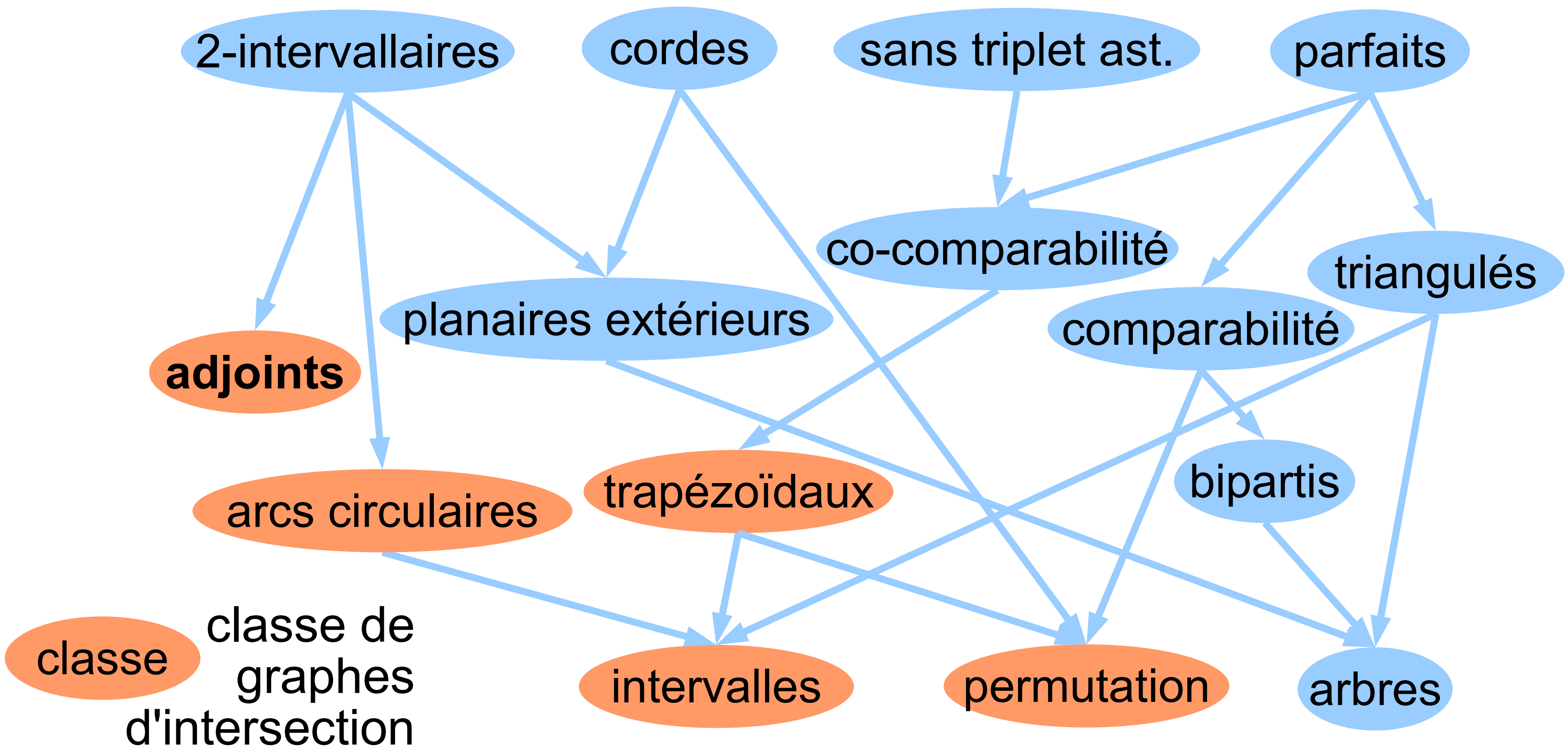
Graphe d'inclusion des classes de graphes



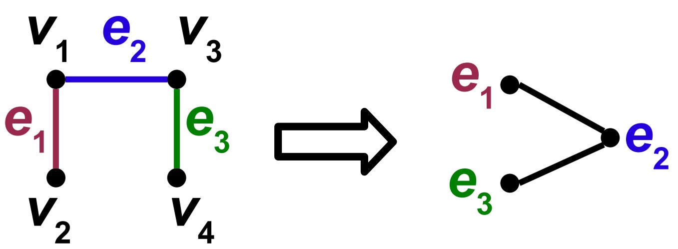
Graphe d'**arcs circulaires** : graphe d'intersection d'**arcs d'un cercle**.



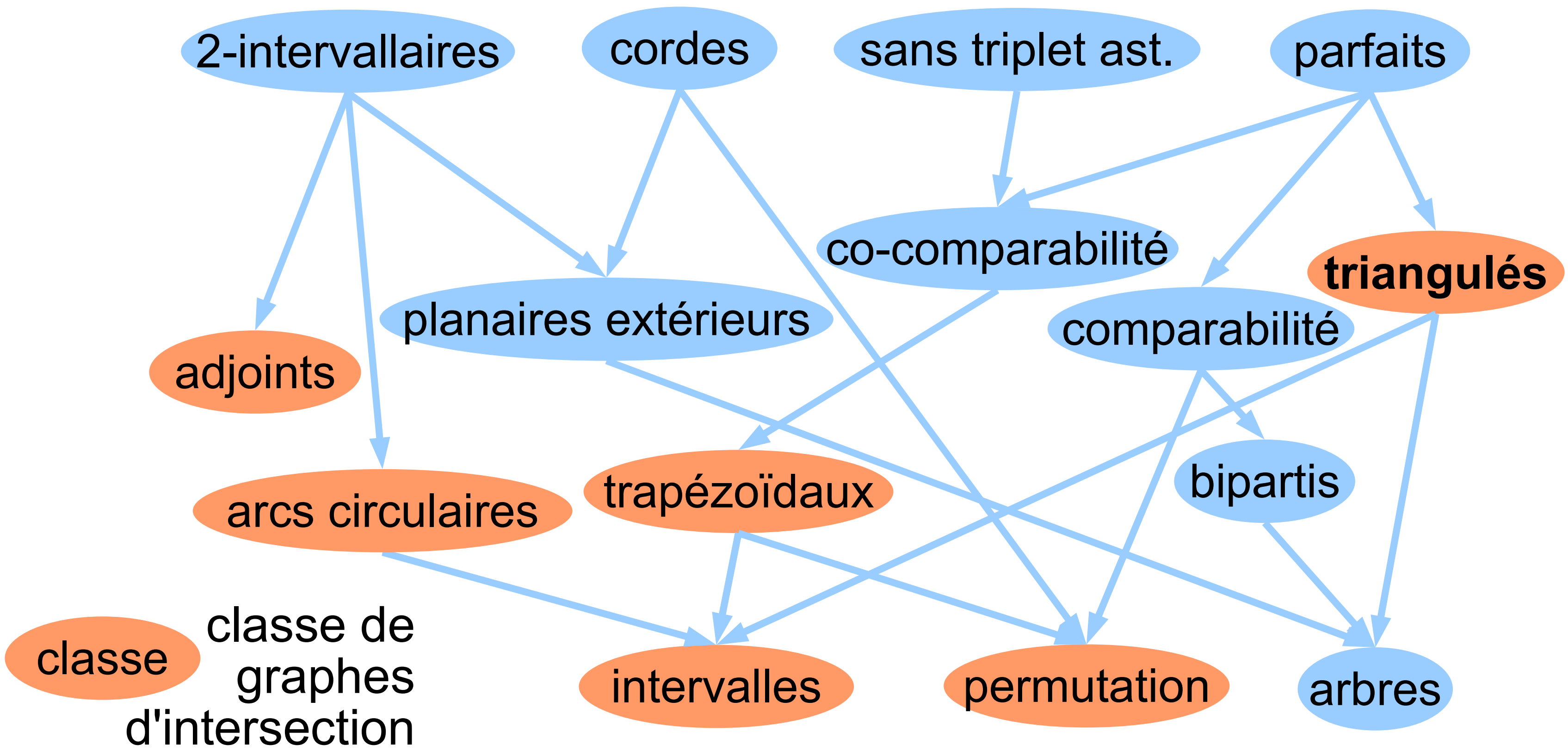
Graphe d'inclusion des classes de graphes



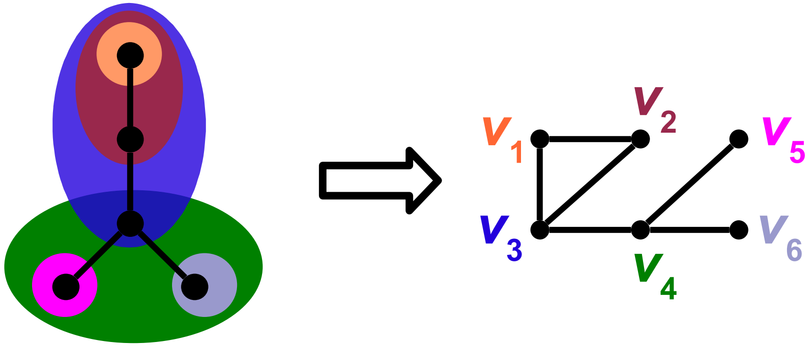
Graphe **adjoint** :
graphe d'intersection des **arêtes d'un graphe**.



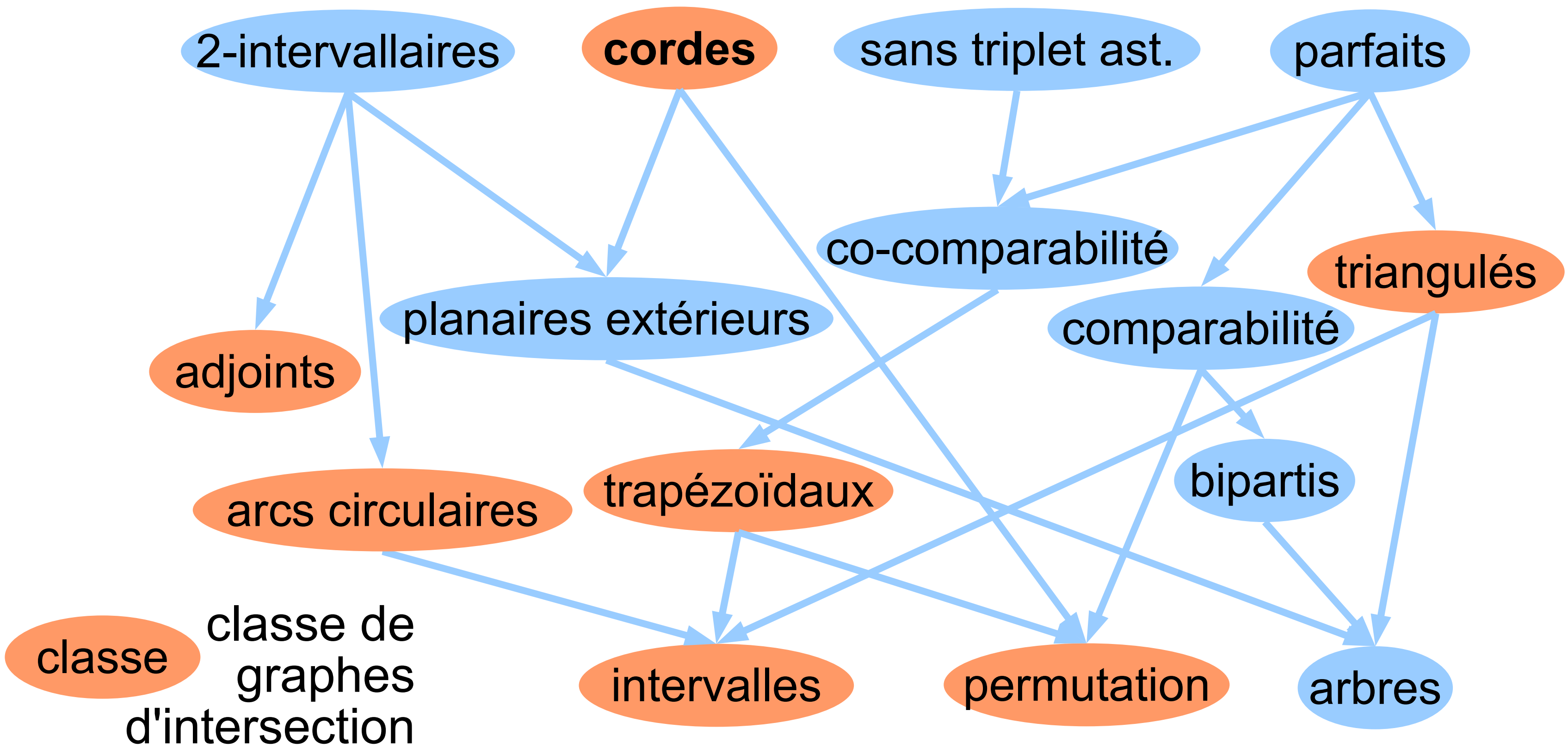
Graphe d'inclusion des classes de graphes



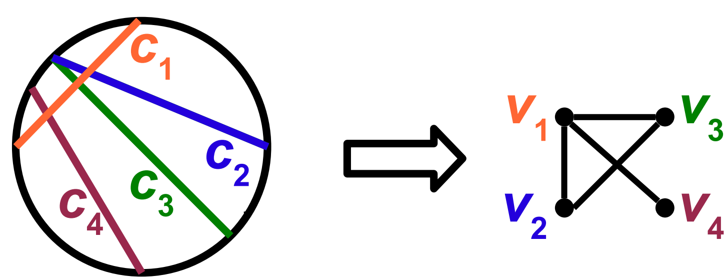
Graphe **triangulé** :
graphe d'intersection
d'une famille de
sous-arbres d'un arbre.



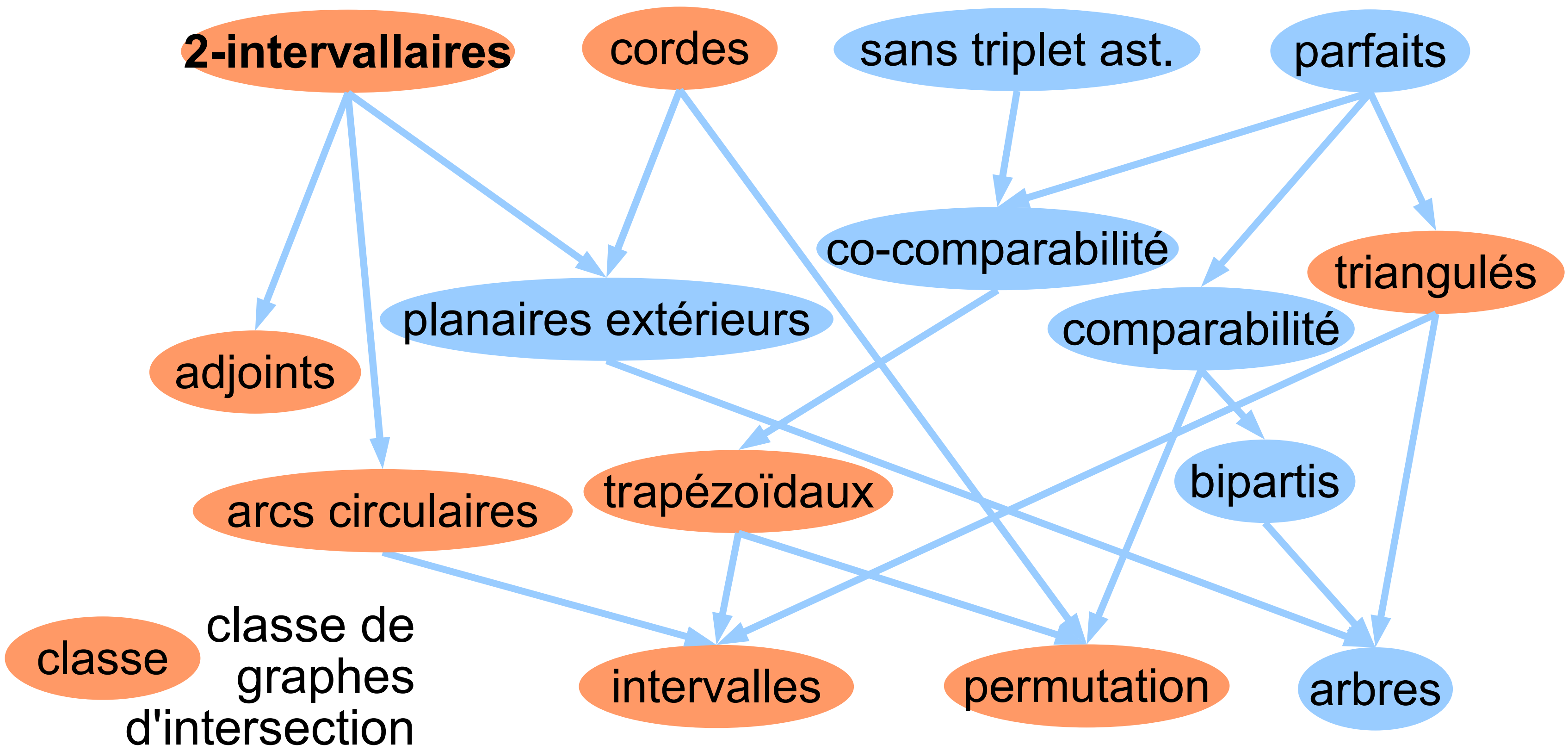
Graphe d'inclusion des classes de graphes



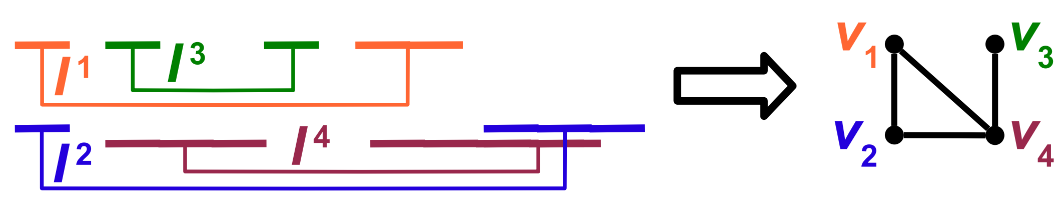
Graphe **de cordes** : graphe d'intersection des **cordes d'un cercle**.



Graphe d'inclusion des classes de graphes



The star of the show,
graphe **2-intervallaire** :
graphe d'intersection
d'unions de deux intervalles.

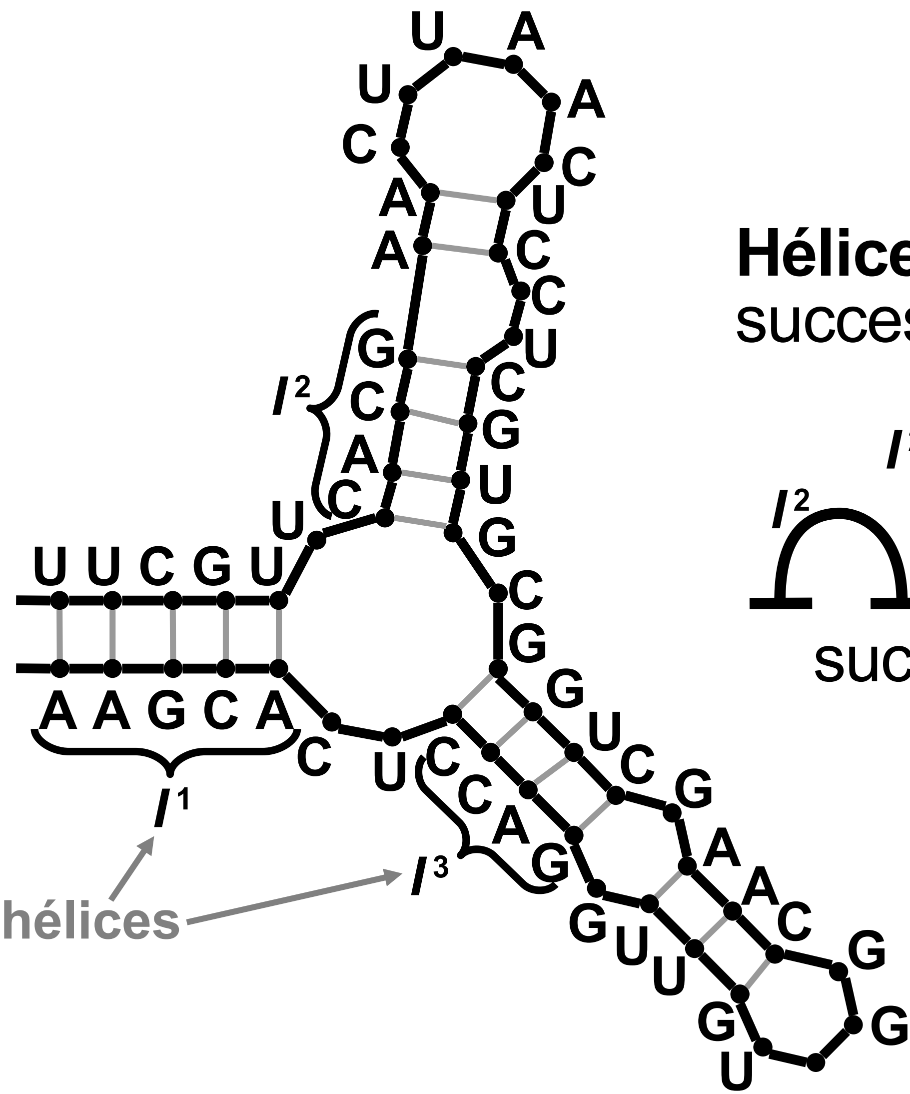


Motivations

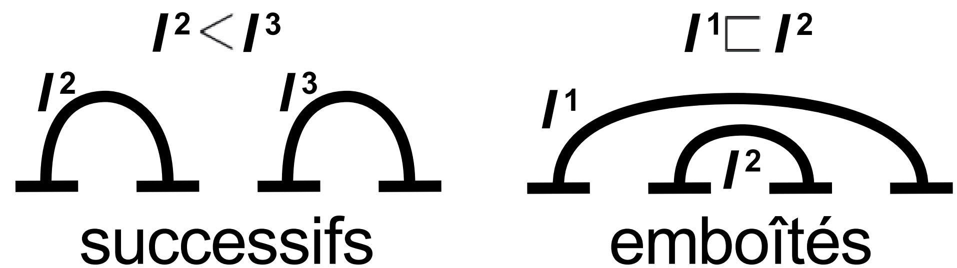
Un **2-intervalle** modélise :

- une tâche coupée en 2 dans un problème d'**ordonnancement**
- deux portions similaires ou complémentaires inversées d'**ADN**
- deux portions complémentaires et inversées d'**ARN**
- deux extraits « mis en relation » dans une **partition musicale**

Motivations : cas de l'ARN

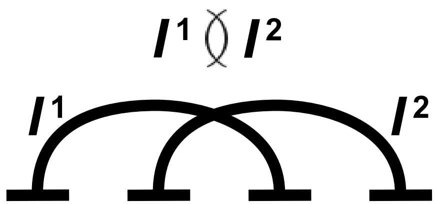


Hélices : appariements de portions successives ou emboîtées d'ARN.

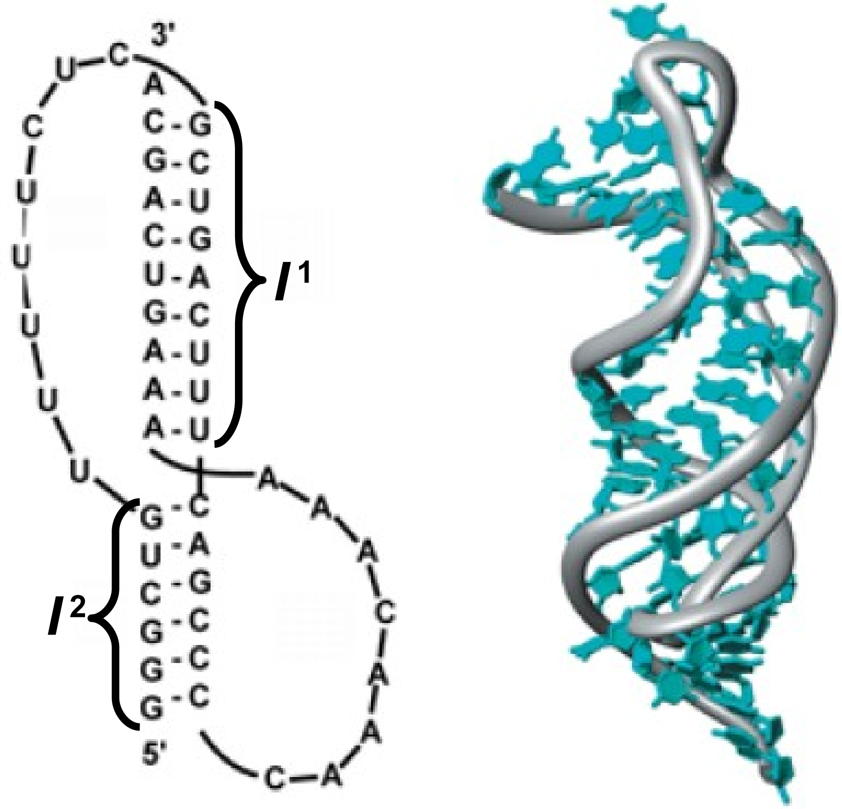


Motivations : cas de l'ARN

Pseudo-noeud :
appariement de nucléotides entrelacés.



croisés



Extrémité 5' du composant ARN de la télomérase humaine

D'après D.W. Staple, S.E. Butcher, *Pseudoknots: RNA structures with Diverse Functions* (PloS Biology 2005 3:6 p.957)

Vers la théorie des graphes : stable max

Trouver les **hélices** d'un ARN sans pseudo-noeud
donné comme une suite de nucléotides.

$\Updownarrow$

Trouver le plus **grand sous-ensemble** de 2-intervalles
disjoints, uniquement **successifs ou emboîtés**,
dans un ensemble de 2-intervalles.

$\Updownarrow$

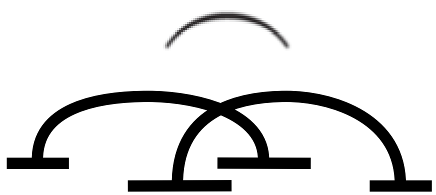
Trouver le **stable maximum** du graphe tel que :

- les **sommets** correspondent aux **2-intervalles**,
- une **arête** joint deux 2-intervalles qui **s'intersectent**,
- une **arête** joint deux 2-intervalles **croisés.**

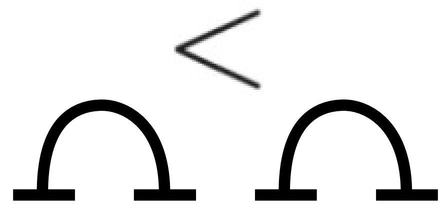
Graphes 2-intervallaires et variantes

16 variantes de la classe des graphes de 2-intervalles :

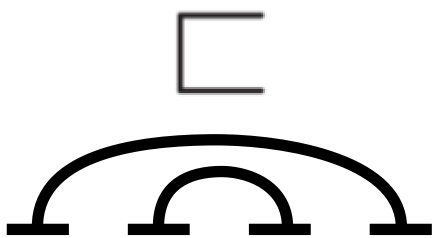
- les **sommets** correspondent aux **2-intervalles**
- une **arête** joint deux 2-intervalles qui sont :



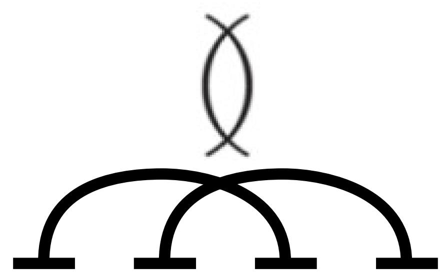
intersectants



successifs



emboîtés



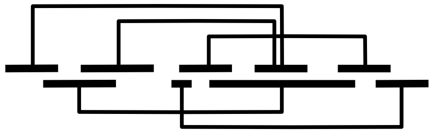
croisés

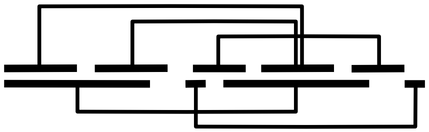
8 classes à caractériser (et leur complémentaire)

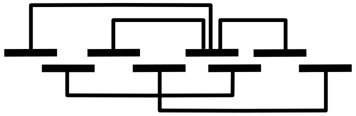
Graphes 2-intervallaires et restrictions

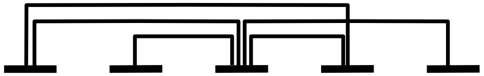
Support d'un ensemble de 2-intervalles :

ensemble des **intervalles support** des 2-intervalles.

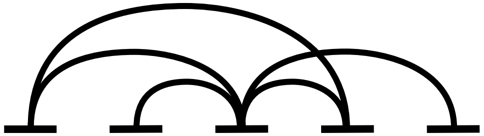
Support sans restriction : 

Support **équilibré :** 

Support **unitaire :** 

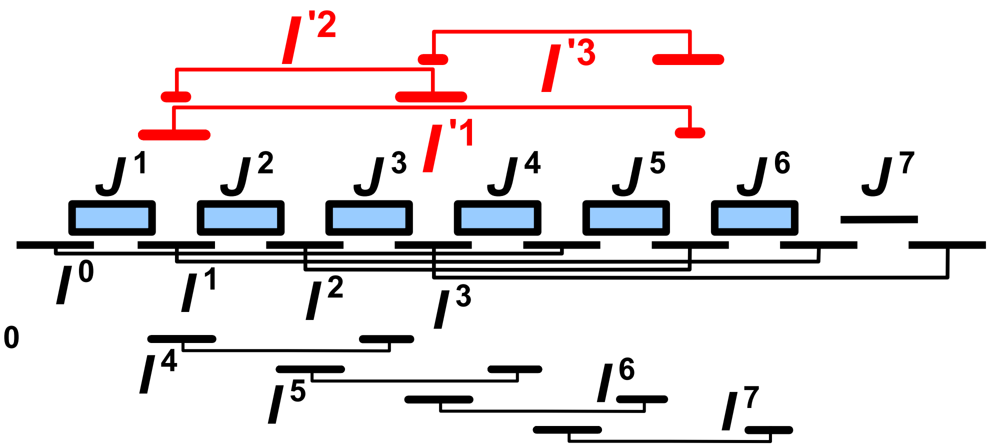
Support **disjoint :** 

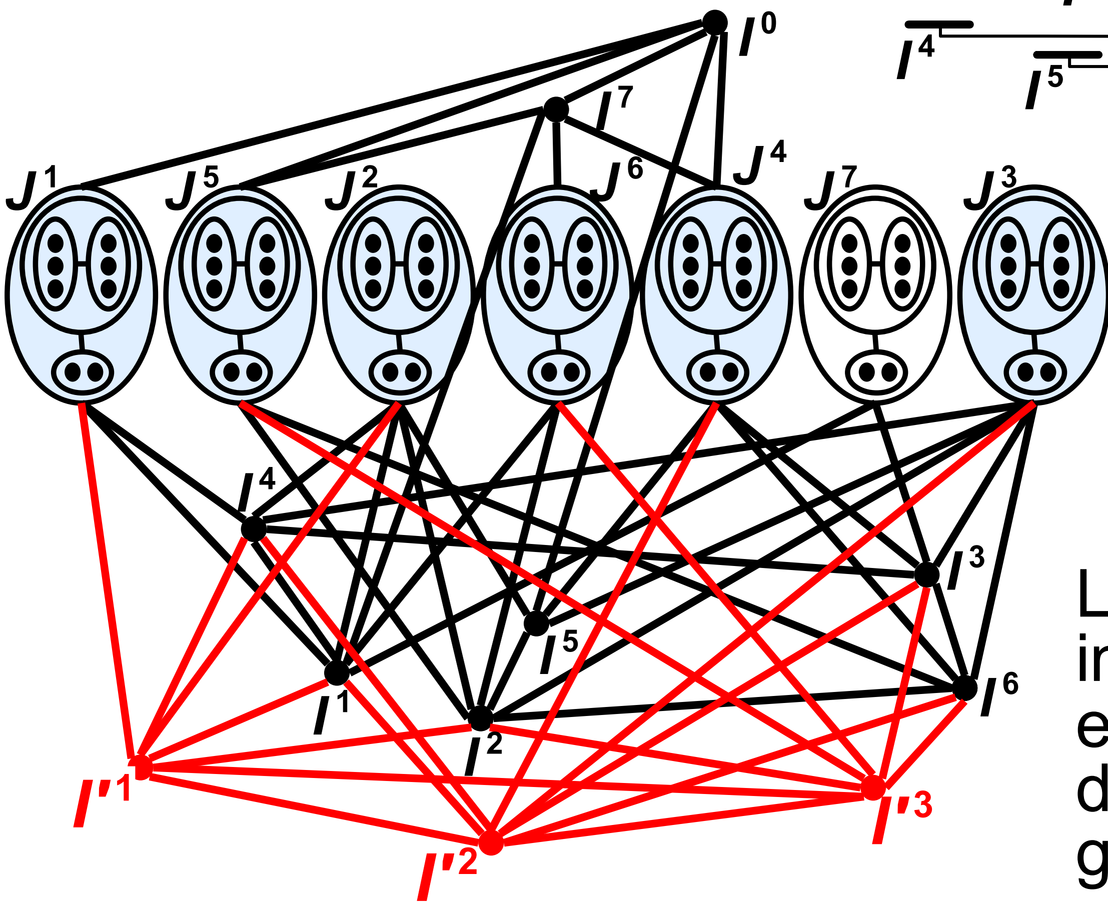
graphes (1,1)-intervallaires

séquences arc-annotées : 

Classe des 2-intervallaires équilibrés

Graphe 2-intervallaire non équilibrable, et une réalisation en 2-intervalles





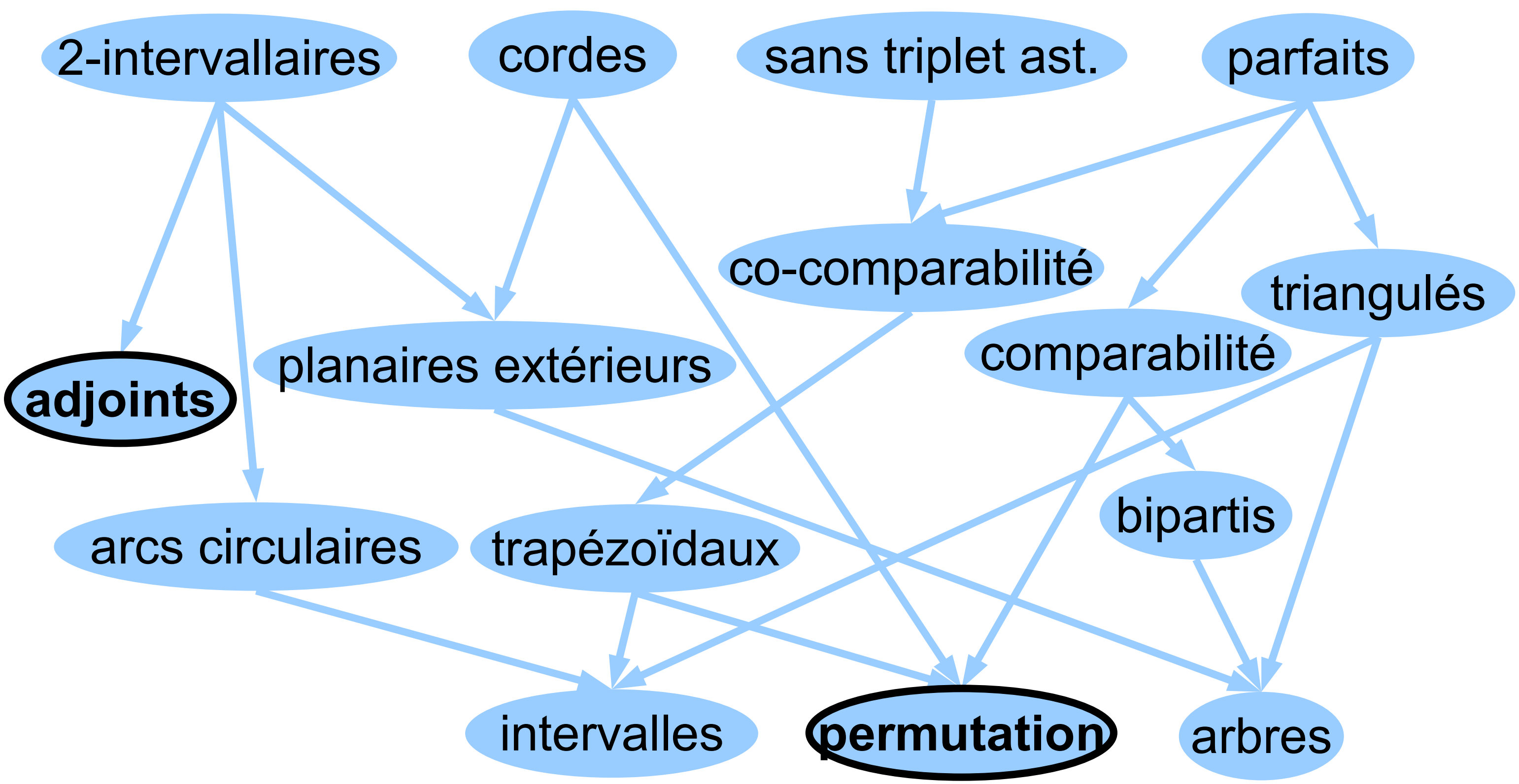
La classe des 2-intervallaires équilibrés est **strictement incluse** dans la classe des graphes 2-intervallaires.

Variantes des graphes 2-intervallaires

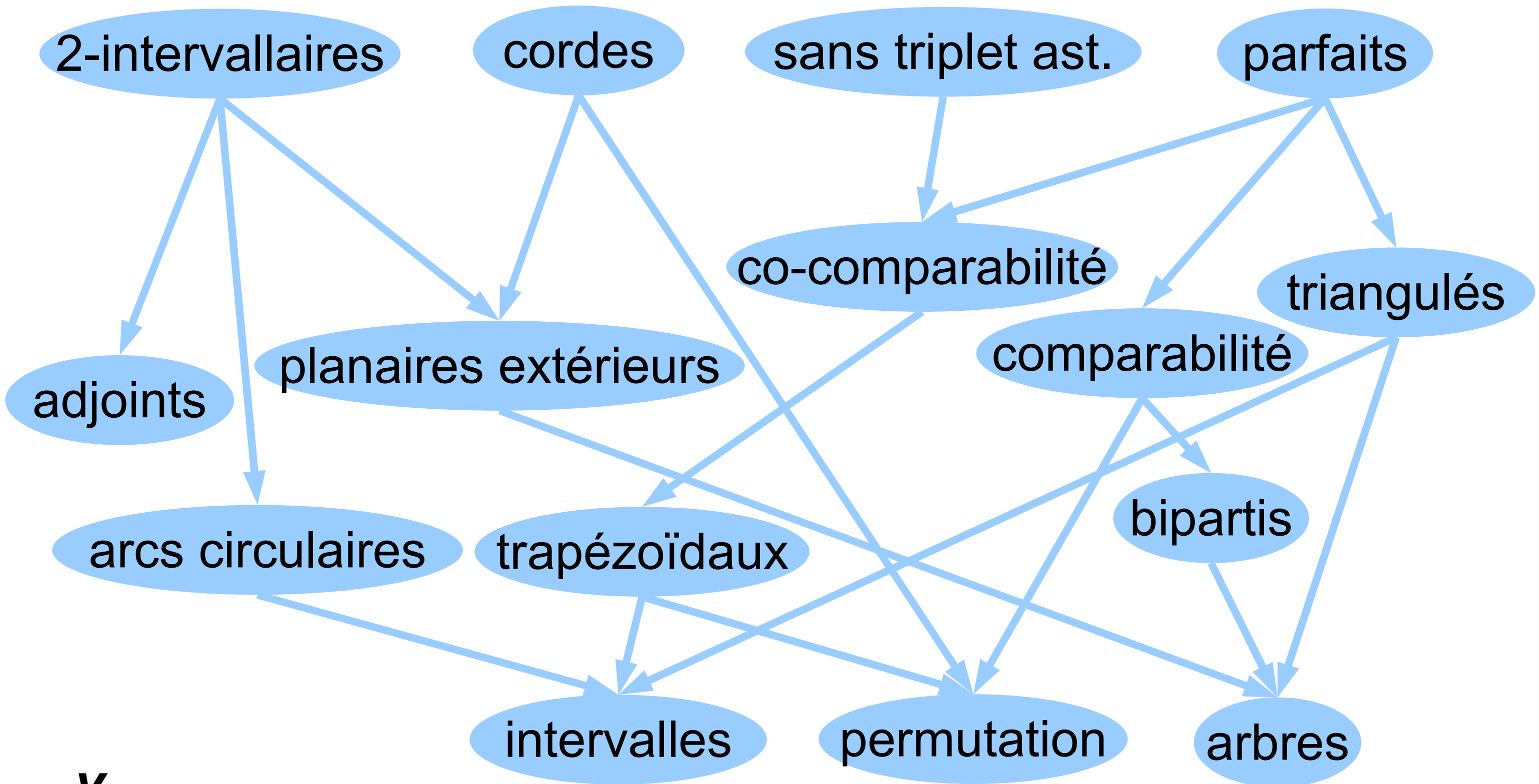
Support :	sans restriction	disjoint
$\{\frown, \sqsubset, <, \between\}$	clique	clique
$\{\frown\}$	2-intervallaires	(1,1)-intervallaires
$\{\frown, \sqsubset\}$	Classes inconnues, stable max NP-complet	Classe inconnue, stable max inconnu
$\{\frown, <\}$		Classe inconnue, stable max polynomial
$\{\frown, \between\}$	Inclusions utiles dans des classes de graphes	cordes
$\{\frown, \sqsubset, <\}$		$\overline{\text{cordes}}$
$\{\frown, \sqsubset, \between\}$	intervalles	intervalles
$\{\frown, <, \between\}$	trapézoïdaux	permutation

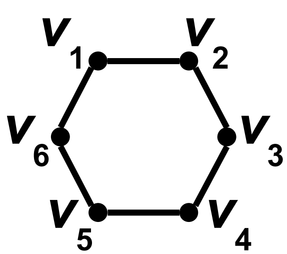
Classe des $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires

Un graphe $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaire est l'union d'un **graphe adjoint** et d'un **graphe de permutation**.

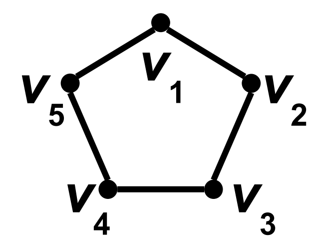


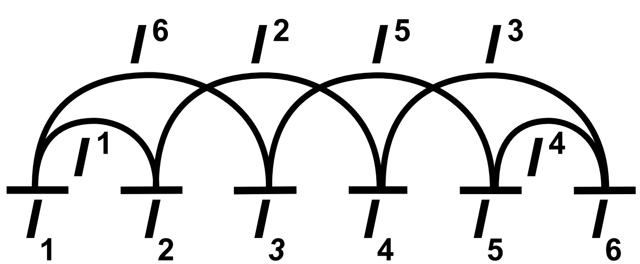
Classe des $\{\frown,\sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires

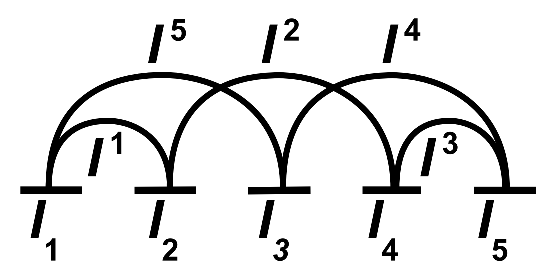




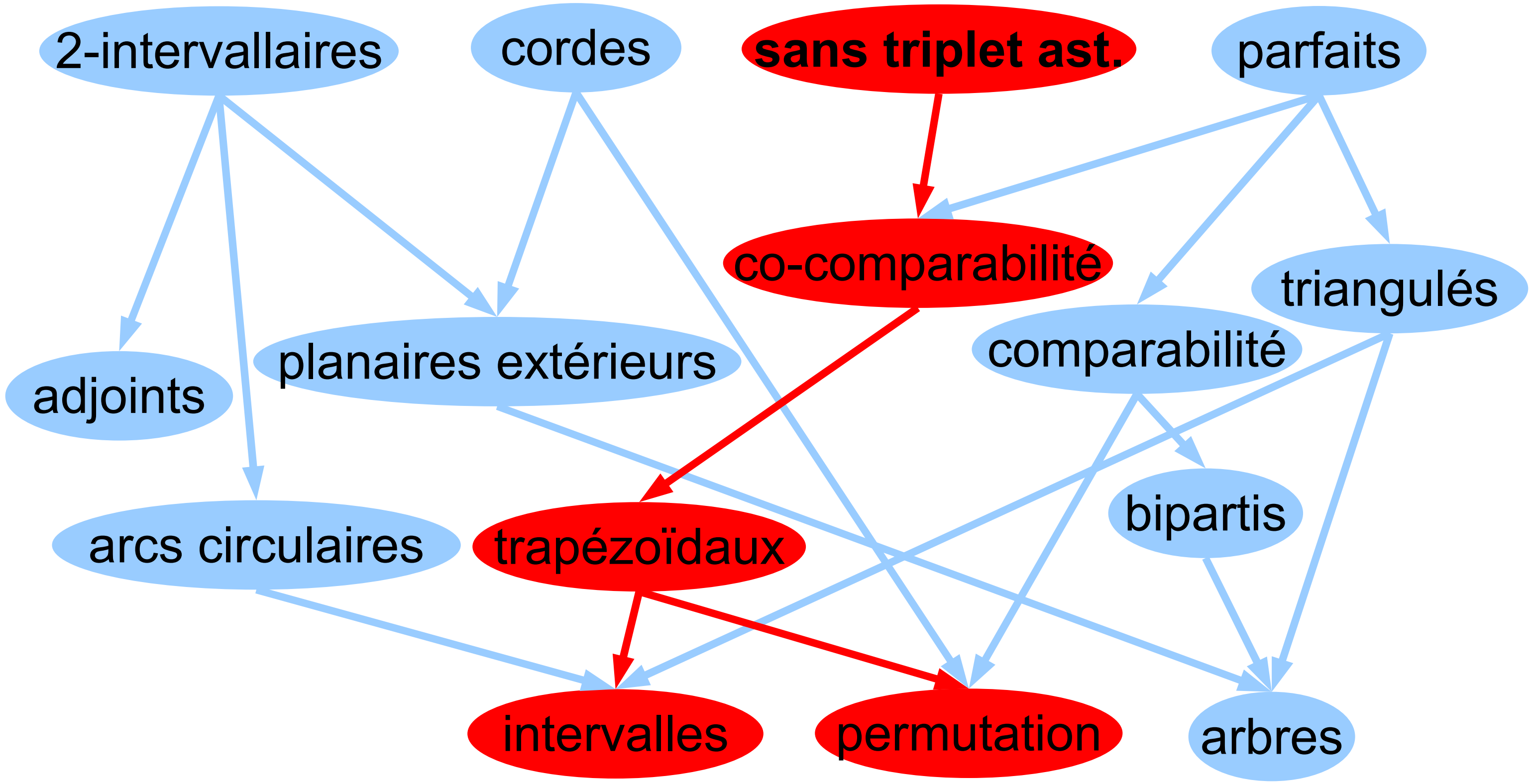
Les **cycles** sont des graphes $\{\frown,\sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires.



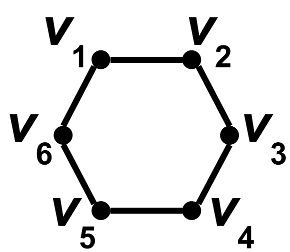


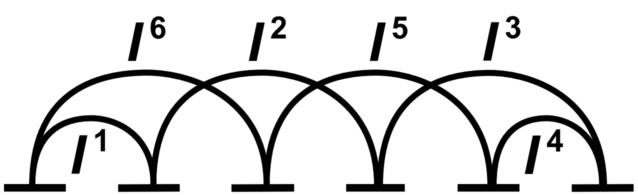


Classe des $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires



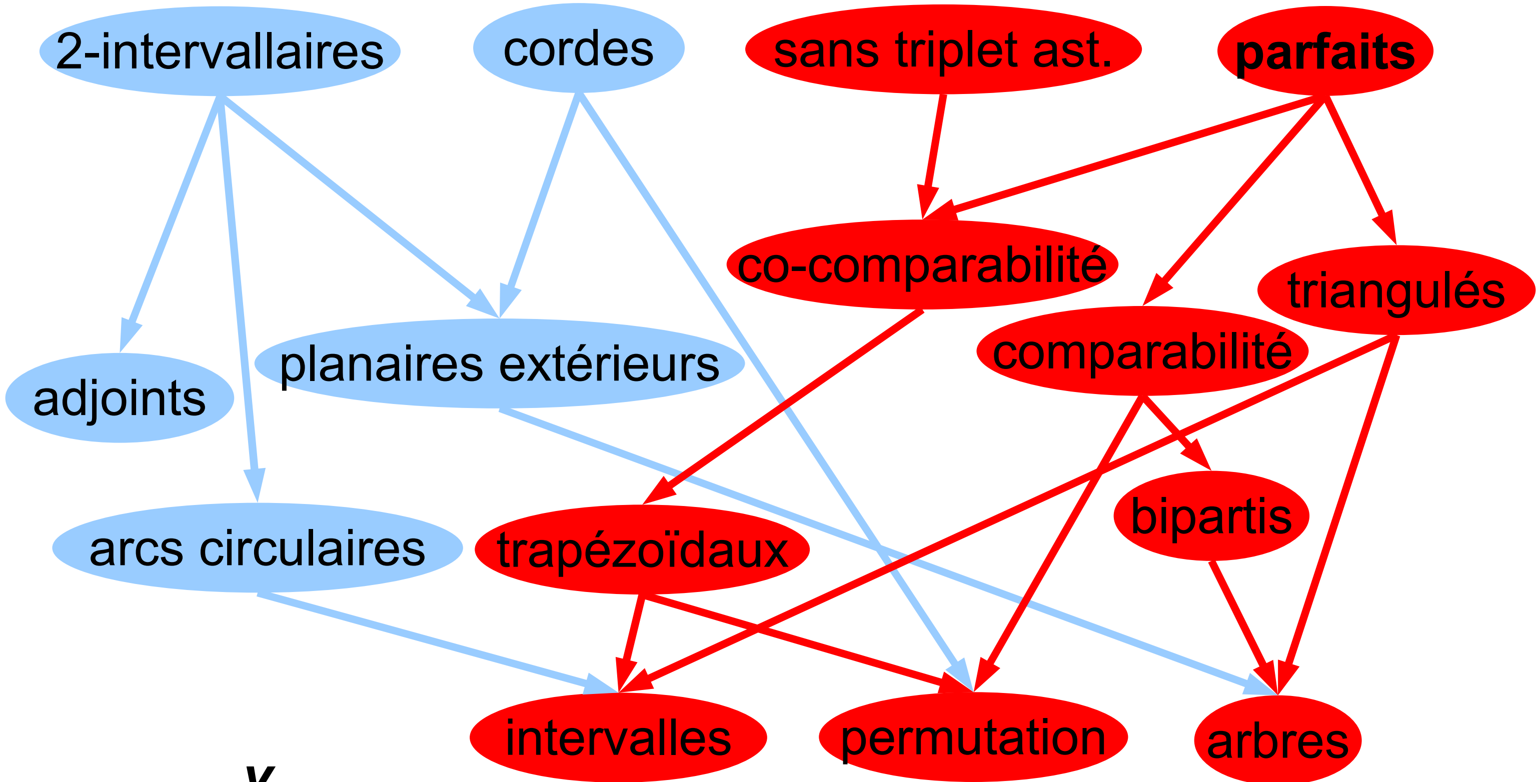
classe — classe de graphes ne contenant pas celle des $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires

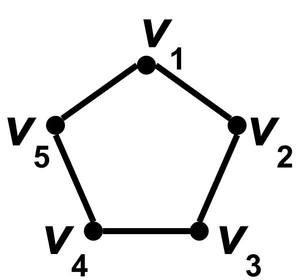


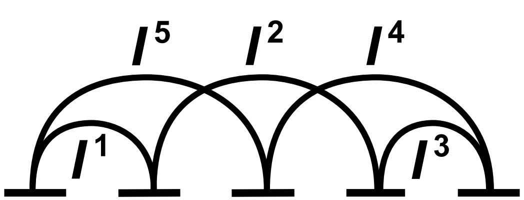


Les **cycles** sont des graphes $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires.

Classe des $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires



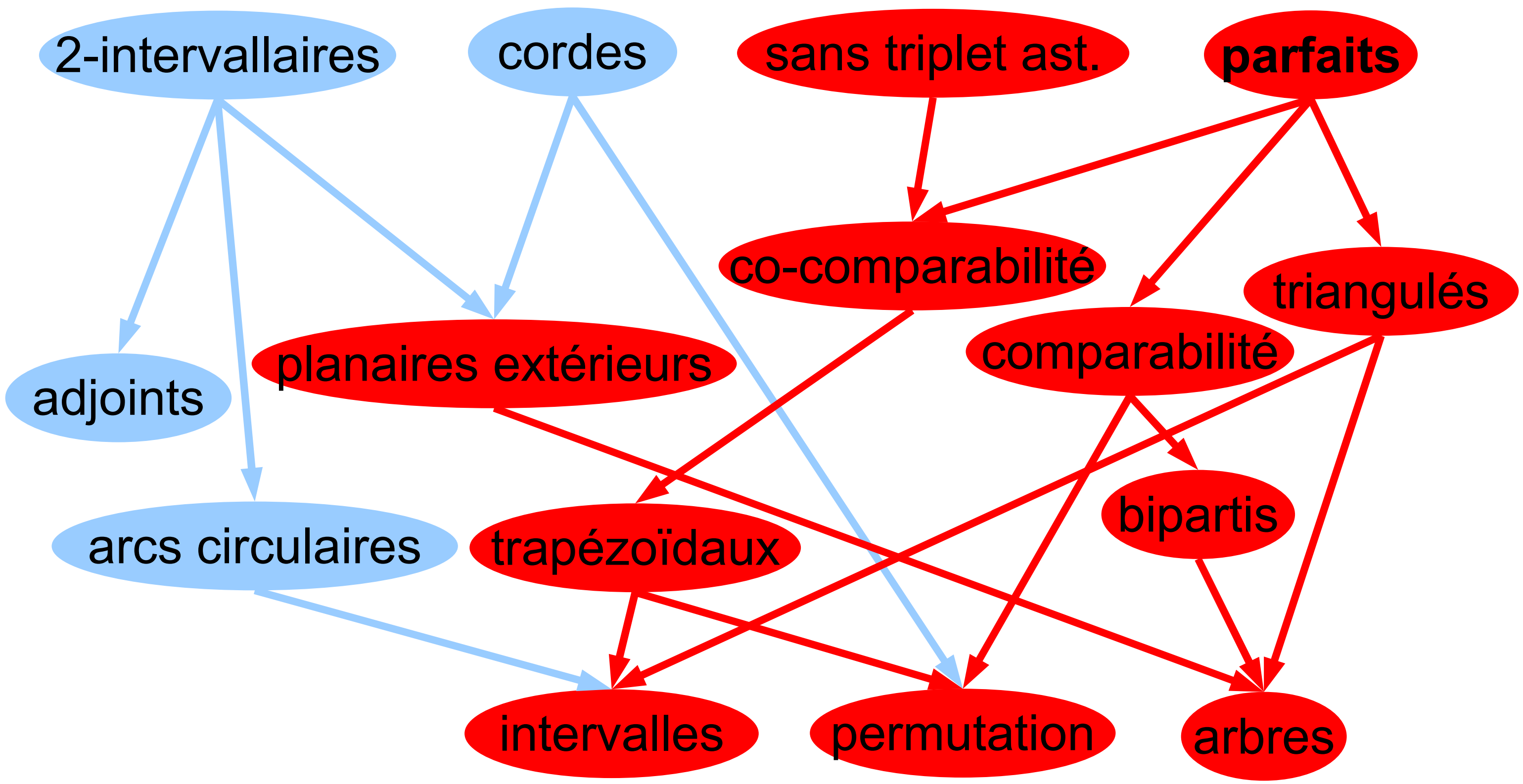




classe de graphes ne contenant pas celle des $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires

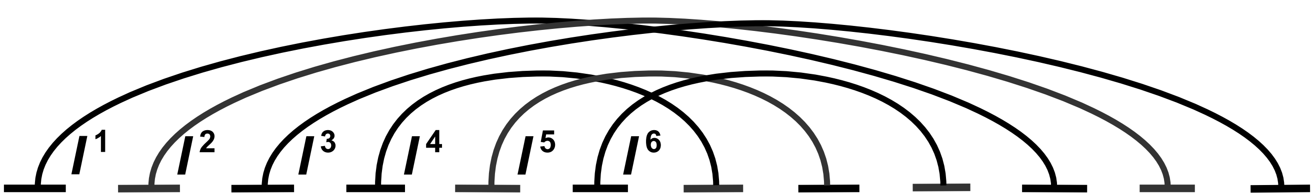
Les **cycles** sont des graphes $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires.

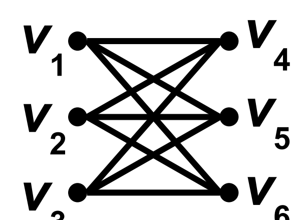
Classe des $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires



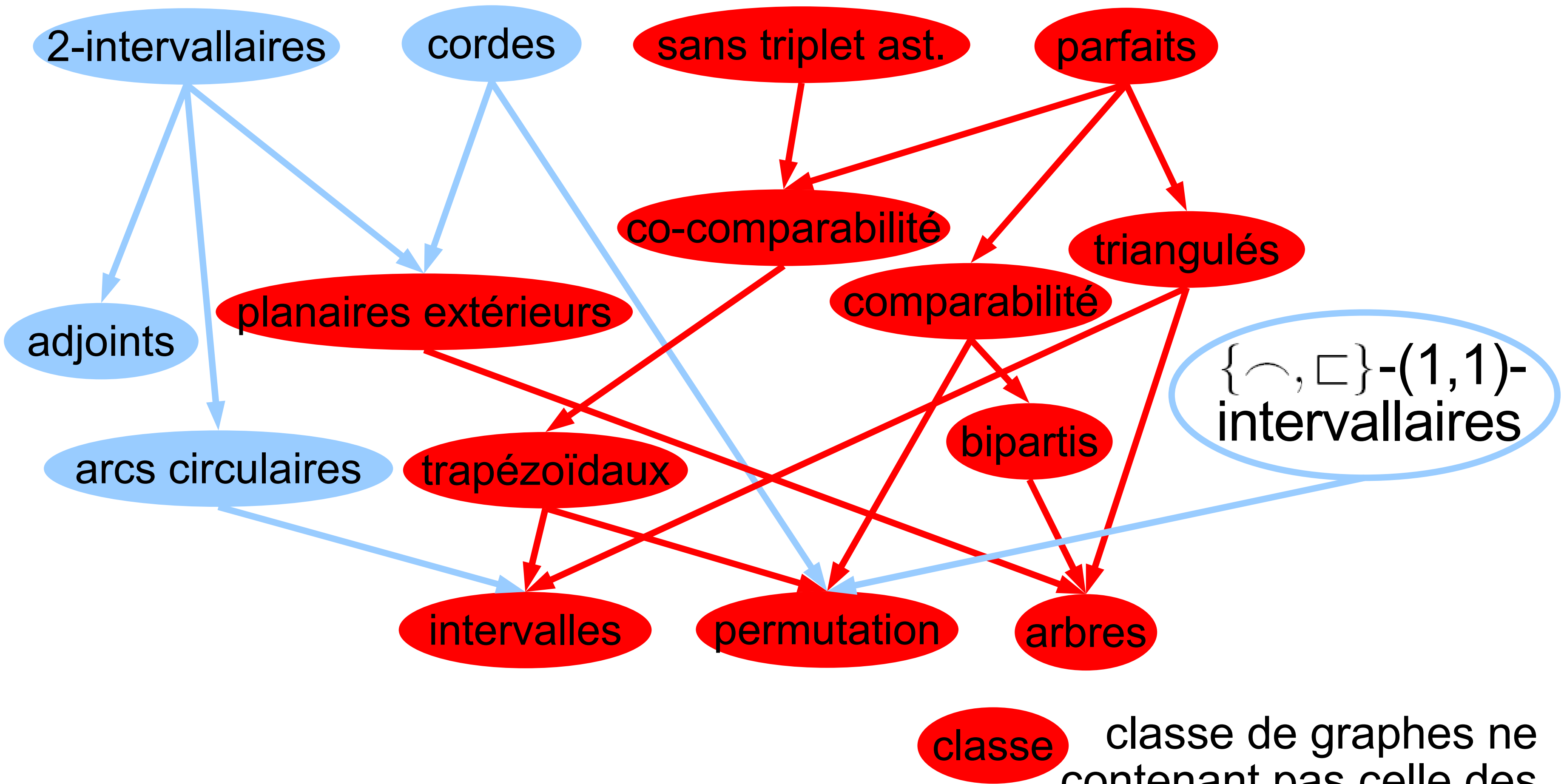
Les **bipartis complets** sont des graphes $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires.

classe — classe de graphes ne contenant pas celle des $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires





Classe des $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires



classe de graphes ne contenant pas celle des $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires

Les **graphes de permutation** sont des graphes $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires.

Classe des $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires

Trouver des **graphes interdits** :

- Y en a-t-il, de quelle taille ?
- Peut-on en exhiber ?

Classe des $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires

Trouver des **graphes interdits** :

- Y en a-t-il, de quelle taille ?
- Peut-on en exhiber ?

Tous les graphes
à 5 noeuds ou moins sont
$\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires.

Classe des $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires

Trouver des **graphes interdits** :

- Y en a-t-il, de quelle taille ?

Majorer le nombre de graphes $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires à *n* noeuds.

Classe des $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires

Trouver des **graphes interdits** :

- Y en a-t-il, de quelle taille ?
  - Majorer le nombre de graphes $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires à *n* noeuds.
    - par le nombre de séquences arc-annotées à *n* arcs.

Enumération des séquences arc-annotées

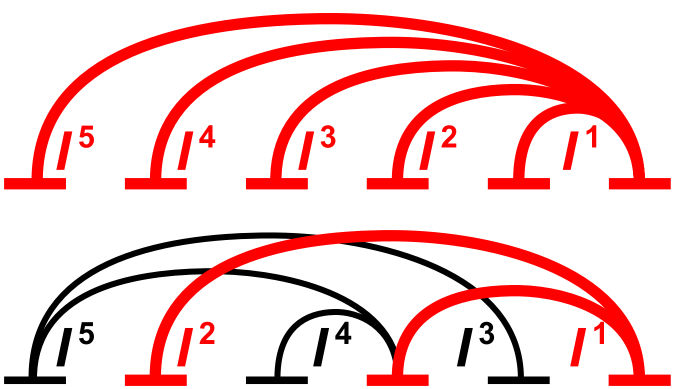
Trouver des **graphes interdits** :

- Y en a-t-il, de quelle taille ?

⇒ Majorer le nombre de graphes $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires à *n* noeuds.

⇒ par le nombre de séquences arc-annotées à *n* arcs.

Nombre de séquences arc-annotées à *n* arcs et *e* extrémités (récursivement par rapport aux extrémités)



$$AA(n,e) = 1_{e=n+1} + \sum_{x=1}^{e-1} \sum_{y=0}^{x} AA(n-x, e-1-y) \binom{e-1}{y} \binom{e-1-y}{x-y}$$

Enumération des séquences arc-annotées

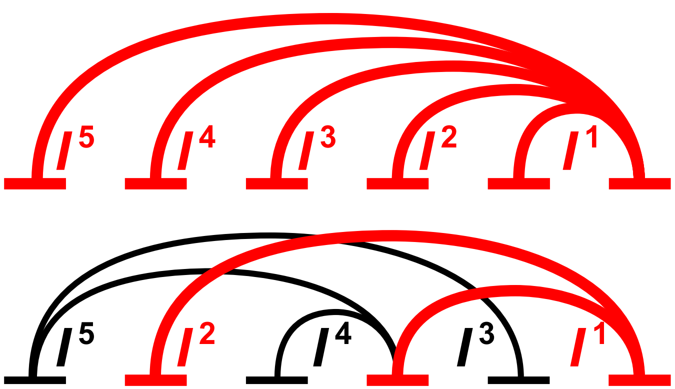
Trouver des **graphes interdits** :

- Y en a-t-il, de quelle taille ?

  ↳ Majorer le nombre de graphes $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires à *n* noeuds.

  ↳ par le nombre de séquences arc-annotées à *n* arcs.

Nombre de séquences arc-annotées à *n* arcs et *e* extrémités (récursivement par rapport aux extrémités)



$$AA(n,e) = 1_{e=n+1} + \sum_{x=1}^{e-1} \sum_{y=0}^{x} AA(n-x, e-1-y) \binom{e-1}{y} \binom{e-1-y}{x-y}$$

$$AA(n) = \sum_{e=1}^{2n} AA(n,e)$$

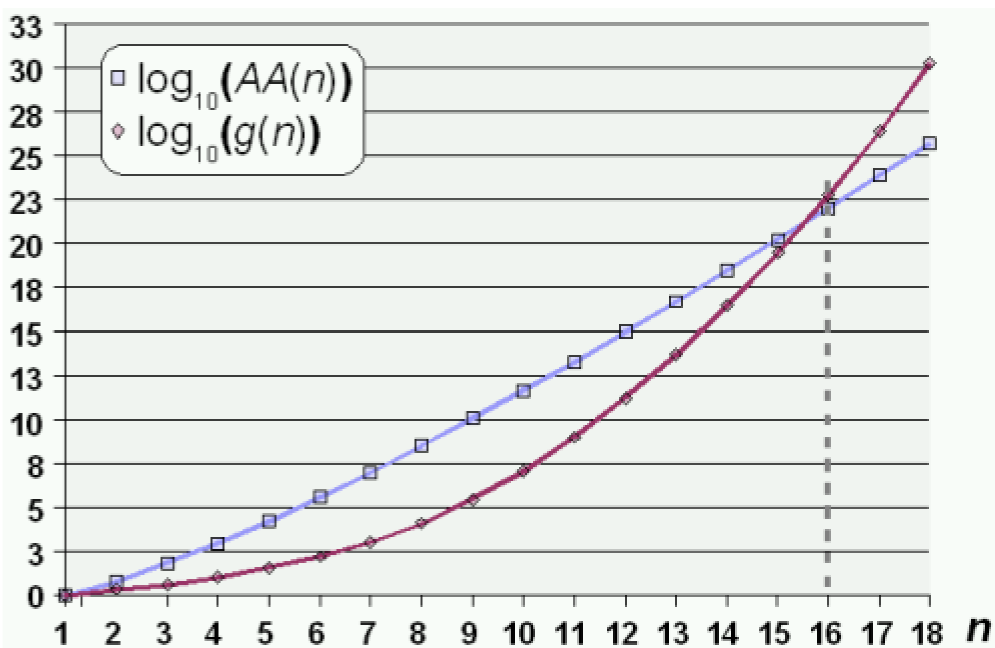
Classe des $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires

Trouver des **graphes interdits** :

- Y en a-t-il, de quelle taille ?

Majorer le nombre de graphes $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires à *n* noeuds.

par le nombre de séquences arc-annotées à *n* arcs.

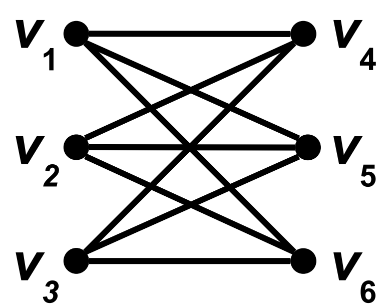


Il existe un graphe à 16 noeuds qui n'est pas $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaire.

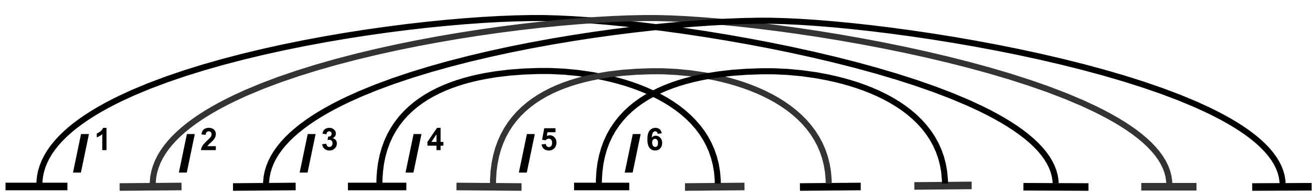
Classe des $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires

Trouver des **graphes interdits** :

- Y en a-t-il, de quelle taille ? *Il en existe, de taille 16.*
- Peut-on en exhiber ? *On en exhibe un de taille 9 :*



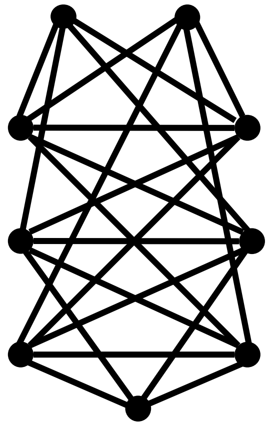
a 40 réalisations en séquence arc-annotée.



Classe des $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires

Trouver des **graphes interdits** :

- Y en a-t-il, de quelle taille ? *Il en existe, de taille 16.*
- Peut-on en exhiber ? *On en exhibe un de taille 9 :*



n'a aucune réalisation en séquence arc-annotée.

Ce graphe **n'est pas** $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaire.

Conclusion

- Une synthèse sur les graphes 2-intervallaires et les algorithmes de résolution du stable max sur diverses classes apparentées.

- De nouveaux résultats :
  - l'inclusion stricte de la classe des graphes 2-intervallaires équilibrés dans celle des 2-intervallaires.
  - des formules de dénombrement des séquences arc-annotées.
  - quelques éléments de caractérisation de la classe des graphes $\{\frown, \sqsubset\}$-(1,1)-intervallaires.

- Un problème de complexité qui reste ouvert.

  Piste pour un algorithme polynomial : caractérisation en partant du diagramme de Hasse.