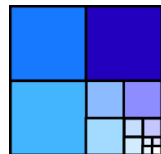


**Stage de Master M2**

# ***Les graphes 2-intervallaires***

**Philippe Gambette**  
**Sous la direction de Michel Habib**  
**(LIAFA)**

<http://philippe.gambette.free.fr/LIAFA>



LIAFA



Université Paris VII

# Plan

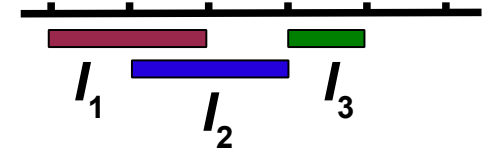
---

- **Graphes d'intersection et 2-intervallaires.**
- **Quelques motivations**
- **Problème du stable maximum**
- **Classes reliées à celle des graphes 2-intervallaires**
- **Graphes 2-intervallaires équilibrés**
- **Séquences arc-annotées**
- **Graphes  $\{\cap, \sqcup\}$ -(1,1)-intervallaires**

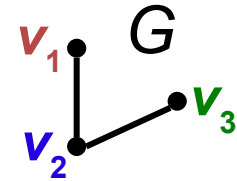
# Les graphes d'intersection

des noeuds  $\Leftrightarrow$  des ensembles

$$\mathcal{I} = \{[0,2], [1,3], [3,4]\}$$



une **arête**  
entre deux  
noeuds  $\Leftrightarrow$  les deux ensembles  
ont une **intersection**  
**non vide**



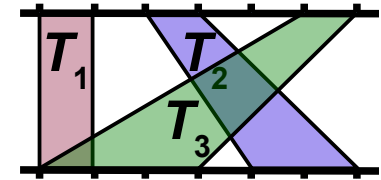
$\mathcal{I}$  est une **réalisation** du **graphe d'intersection**  $G$ .

$G$  est un **graphe d'intervalles**.

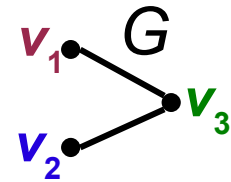
# Les graphes d'intersection

$$\mathcal{T} = \{([0,1],[0,1]),$$
$$([2,3],[4,6]),$$
$$([5,6],[0,3])\}$$

des noeuds  $\Leftrightarrow$  des ensembles



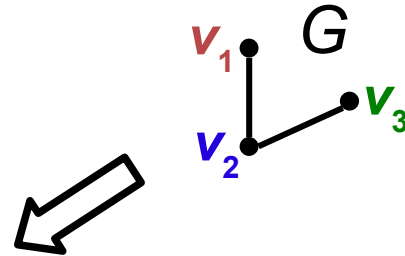
une **arête**  
entre deux  
noeuds  $\Leftrightarrow$  les deux ensembles  
ont une **intersection**  
**non vide**



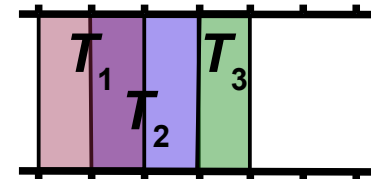
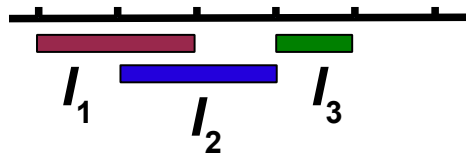
G est un *graphe trapézoïdal*.

# Classes de graphes

Tout graphe d'intervalles est un graphe trapézoïdal.



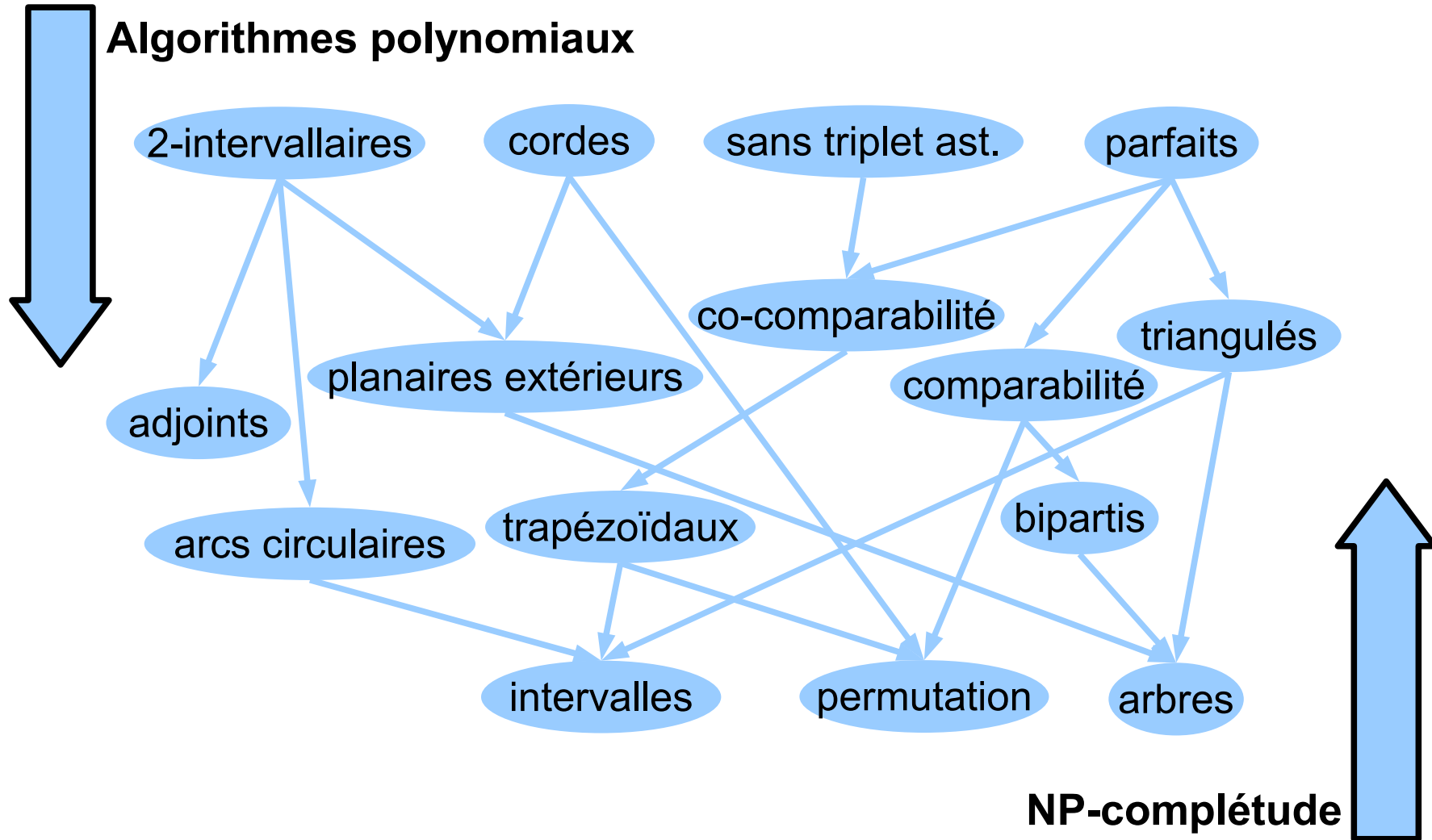
$$\mathcal{I} = \{[0,2], [1,3], [3,4]\} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{T} = \{([0,2],[0,2]), ([1,3],[1,3]), ([3,4],[3,4])\}$$



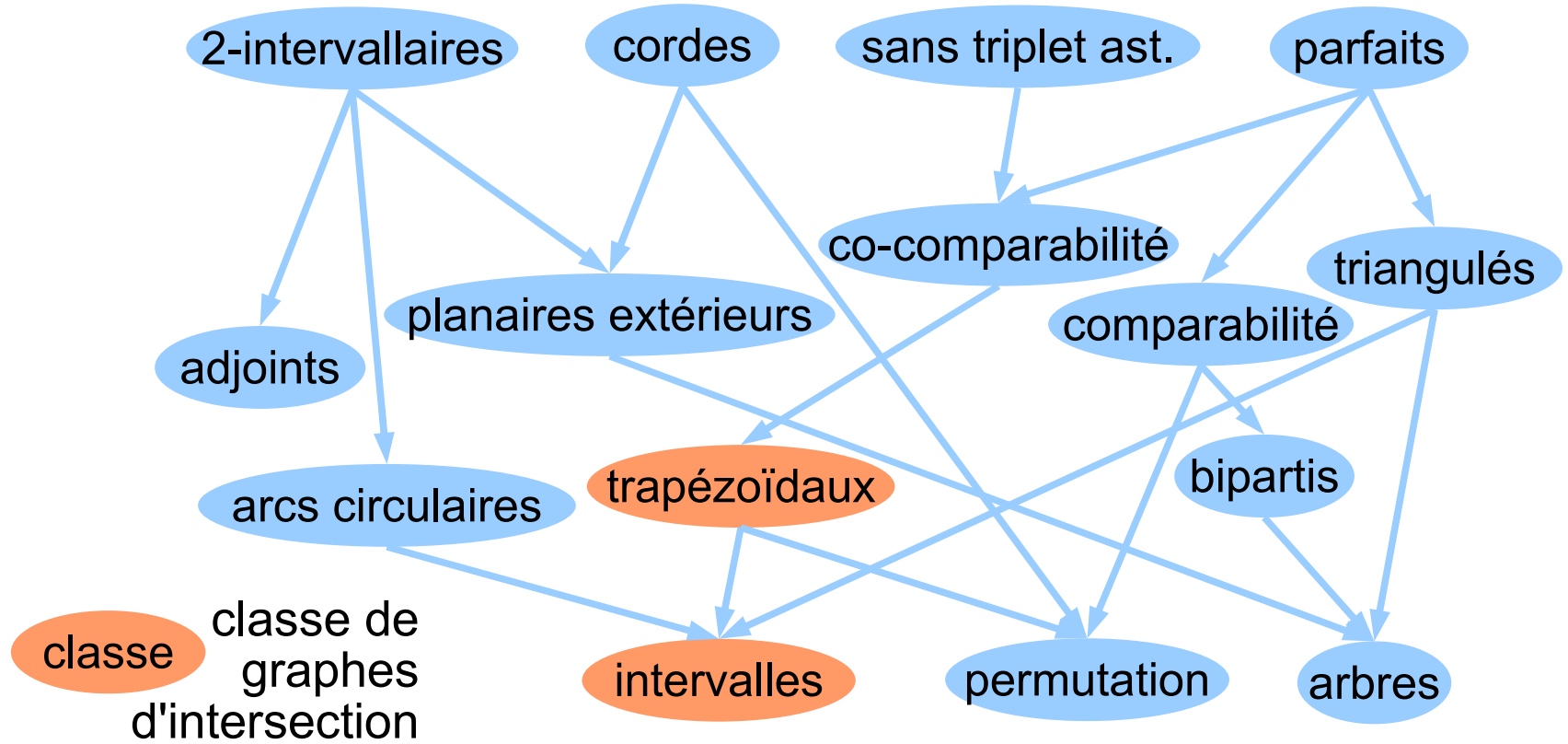
La **classe** de graphes d'intervalles **est incluse** dans celle des graphes trapézoïdaux.



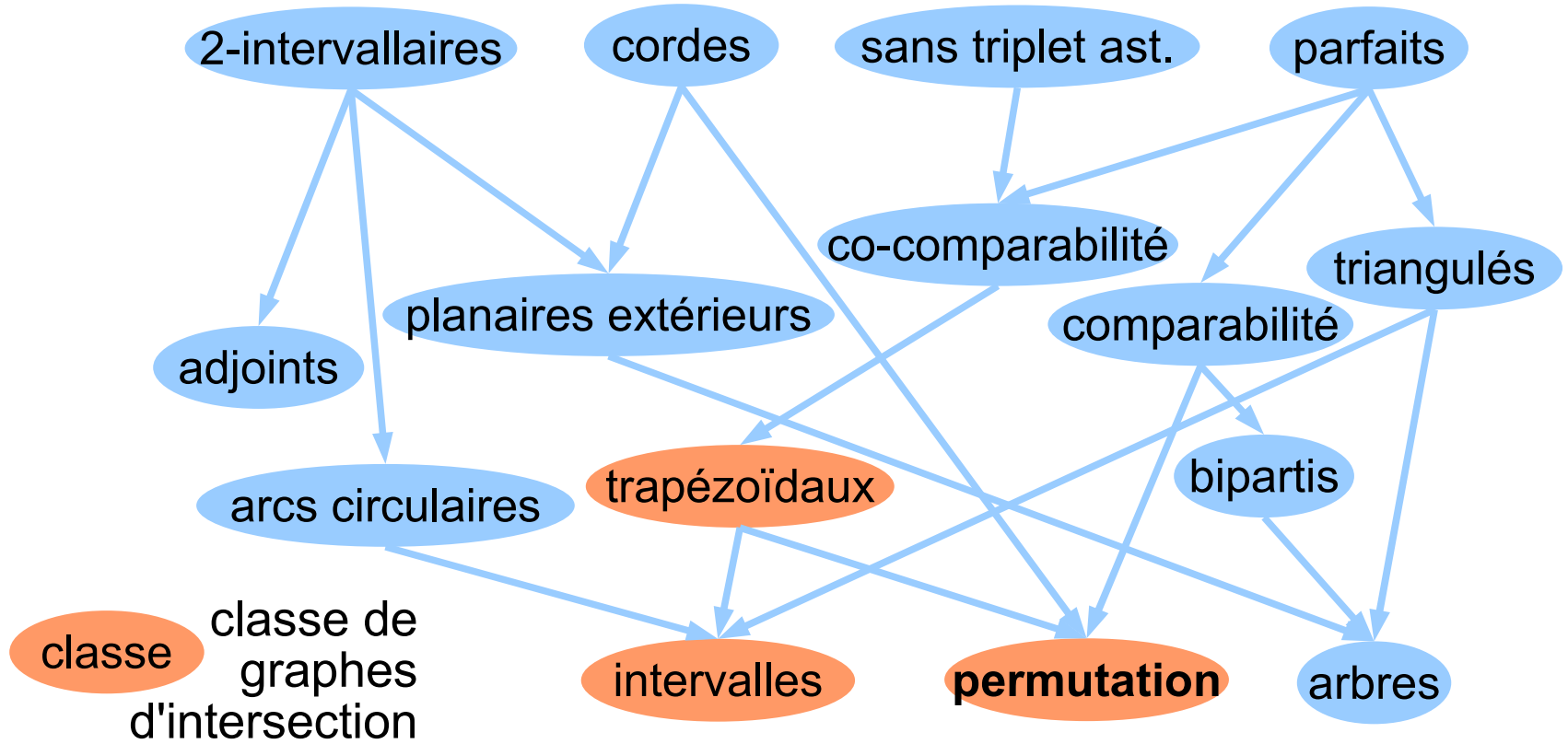
# Graphe d'inclusion des classes de graphes



# Graphe d'inclusion des classes de graphes

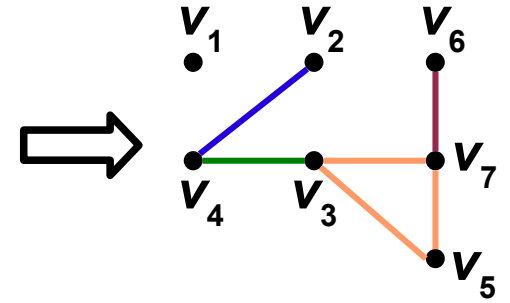
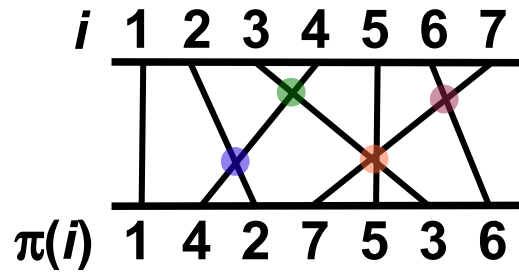


# Graphe d'inclusion des classes de graphes

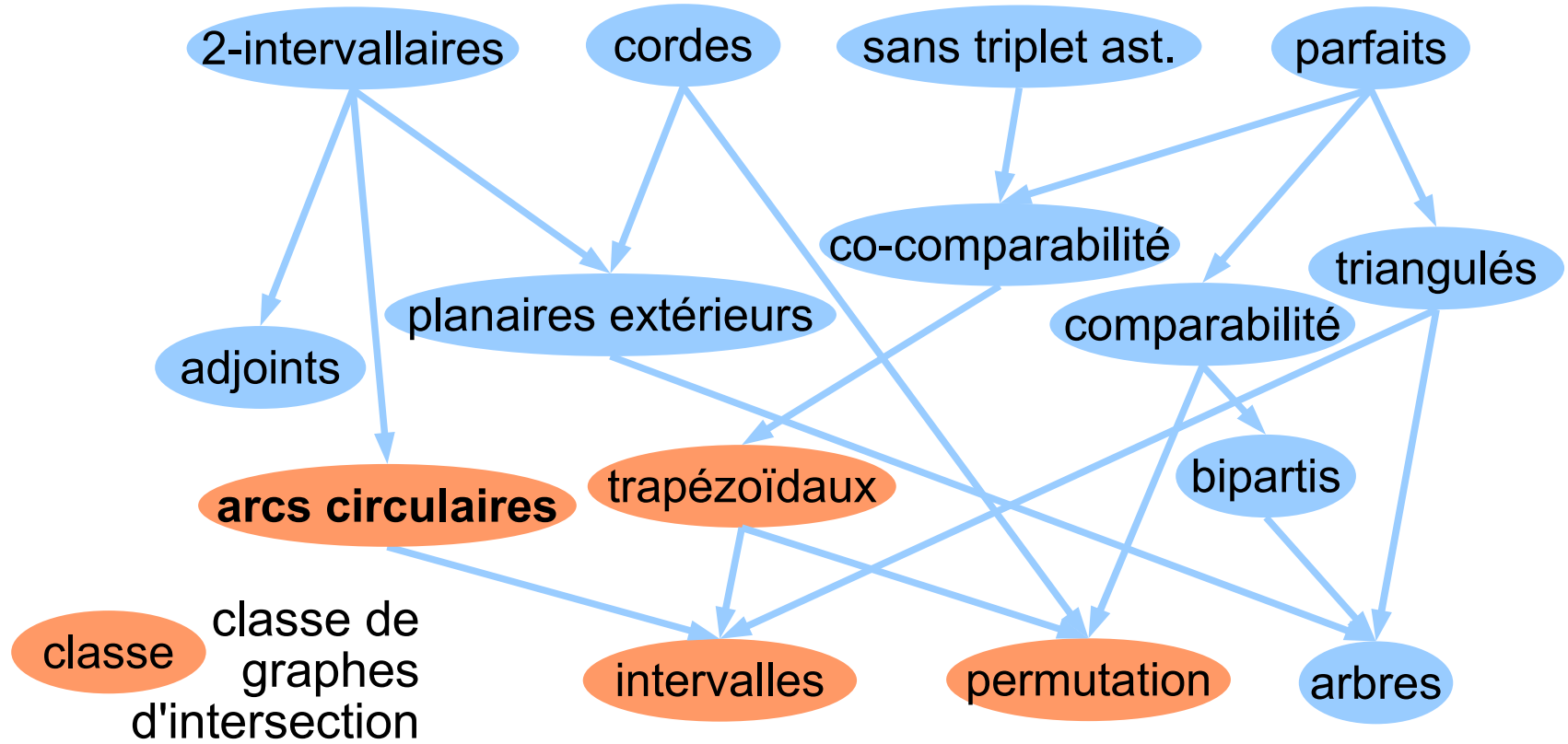


Graphe de **permutation** :  
 graphe d'intersection des  
 segments  $(k, k)$ .

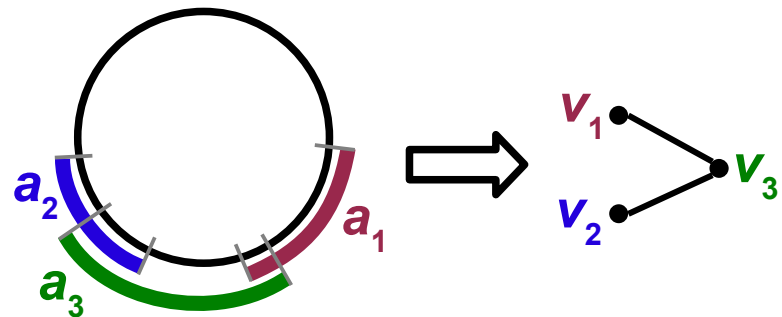
ligne des  $i$     ligne des  $\pi(i)$



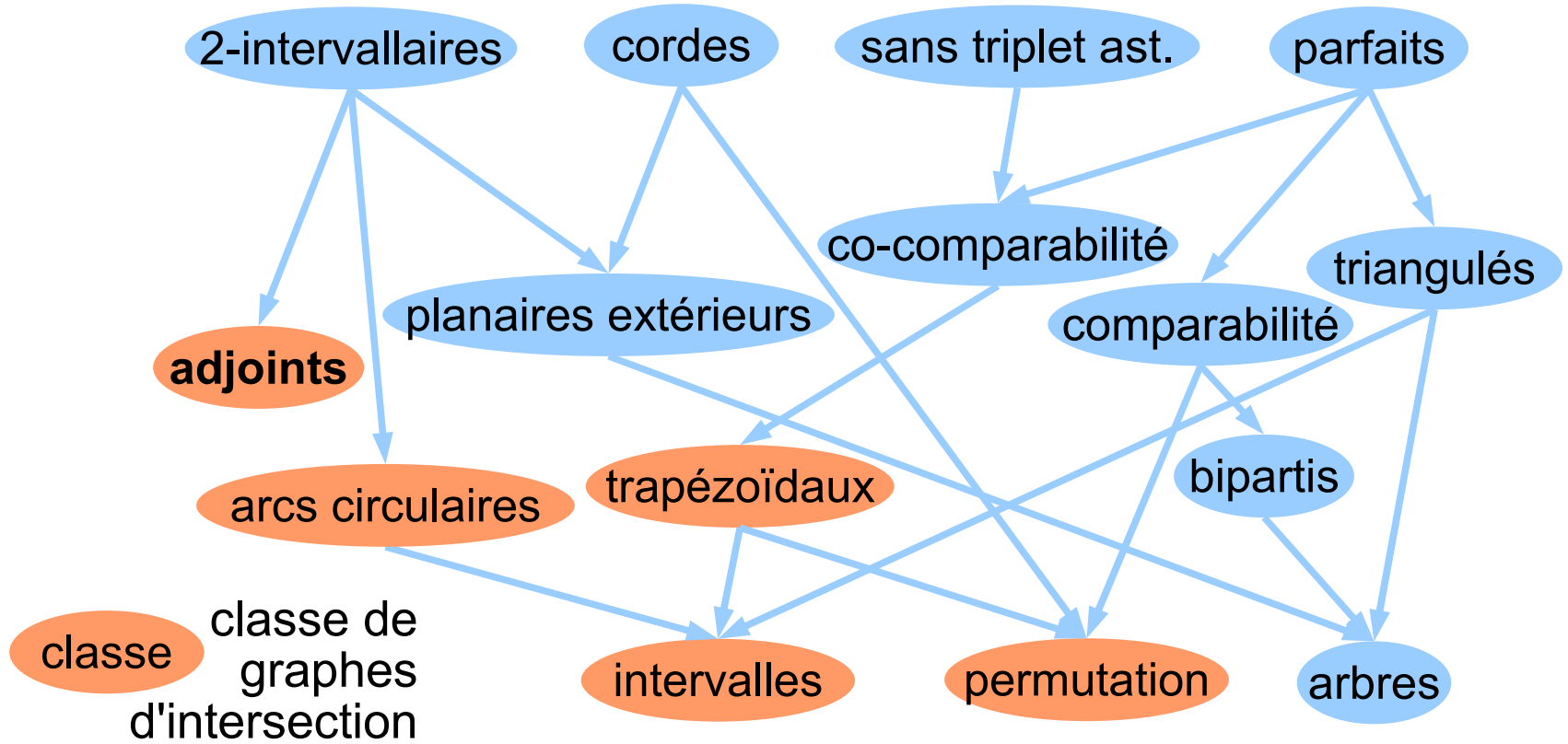
# Graphe d'inclusion des classes de graphes



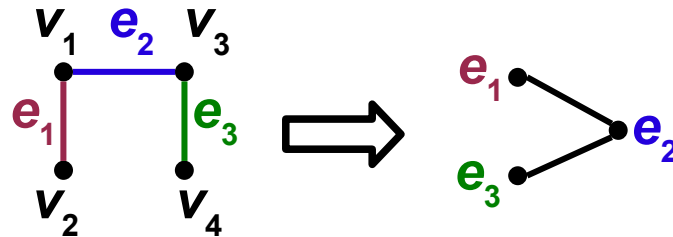
Graphe d'**arcs circulaires** :  
graphe d'intersection d'**arcs**  
d'un **cercle**.



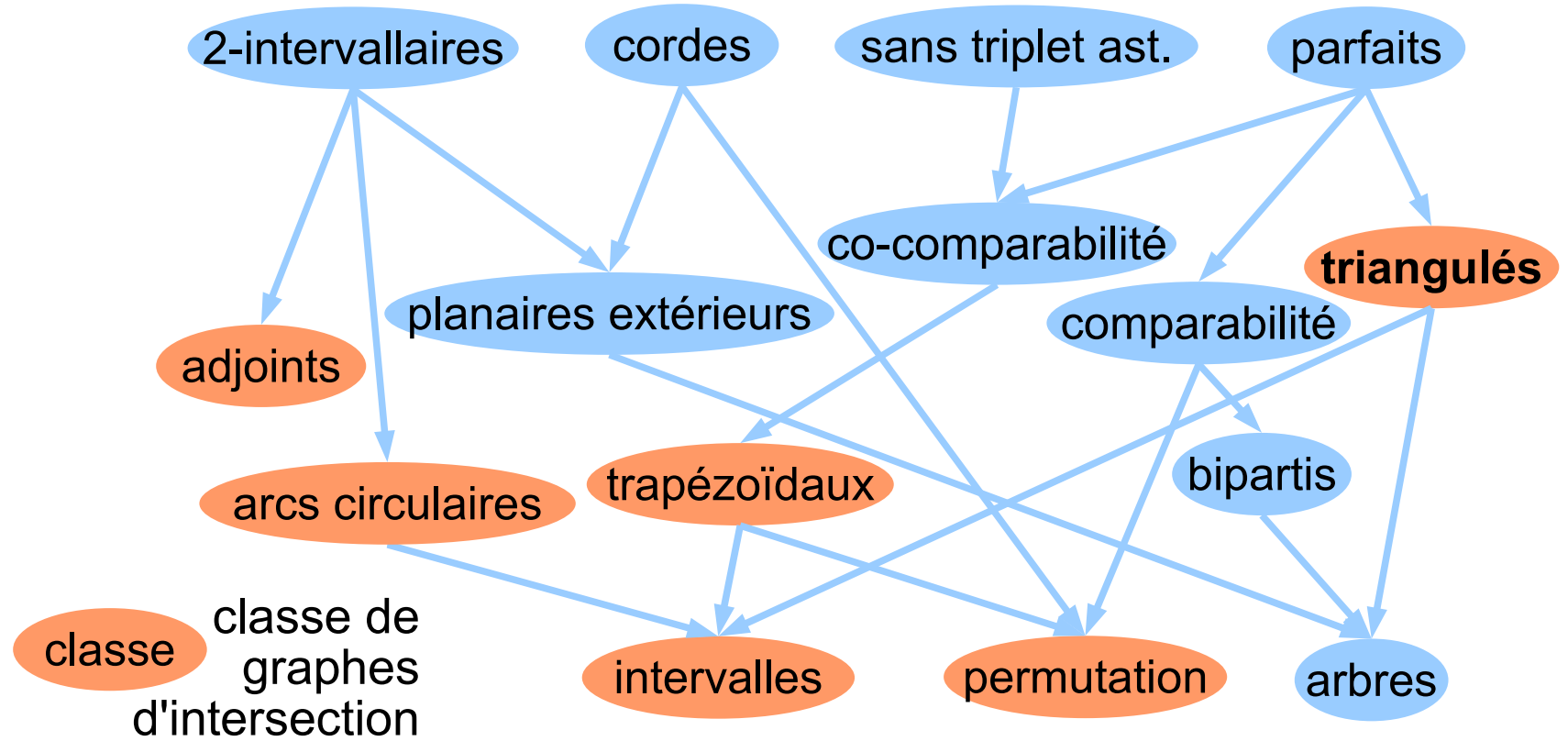
# Graphe d'inclusion des classes de graphes



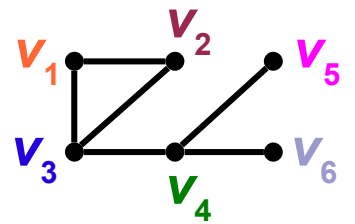
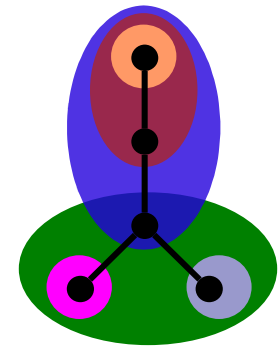
Graphe **adjoint** :  
 graphe d'intersection des  
 arêtes d'un graphe.



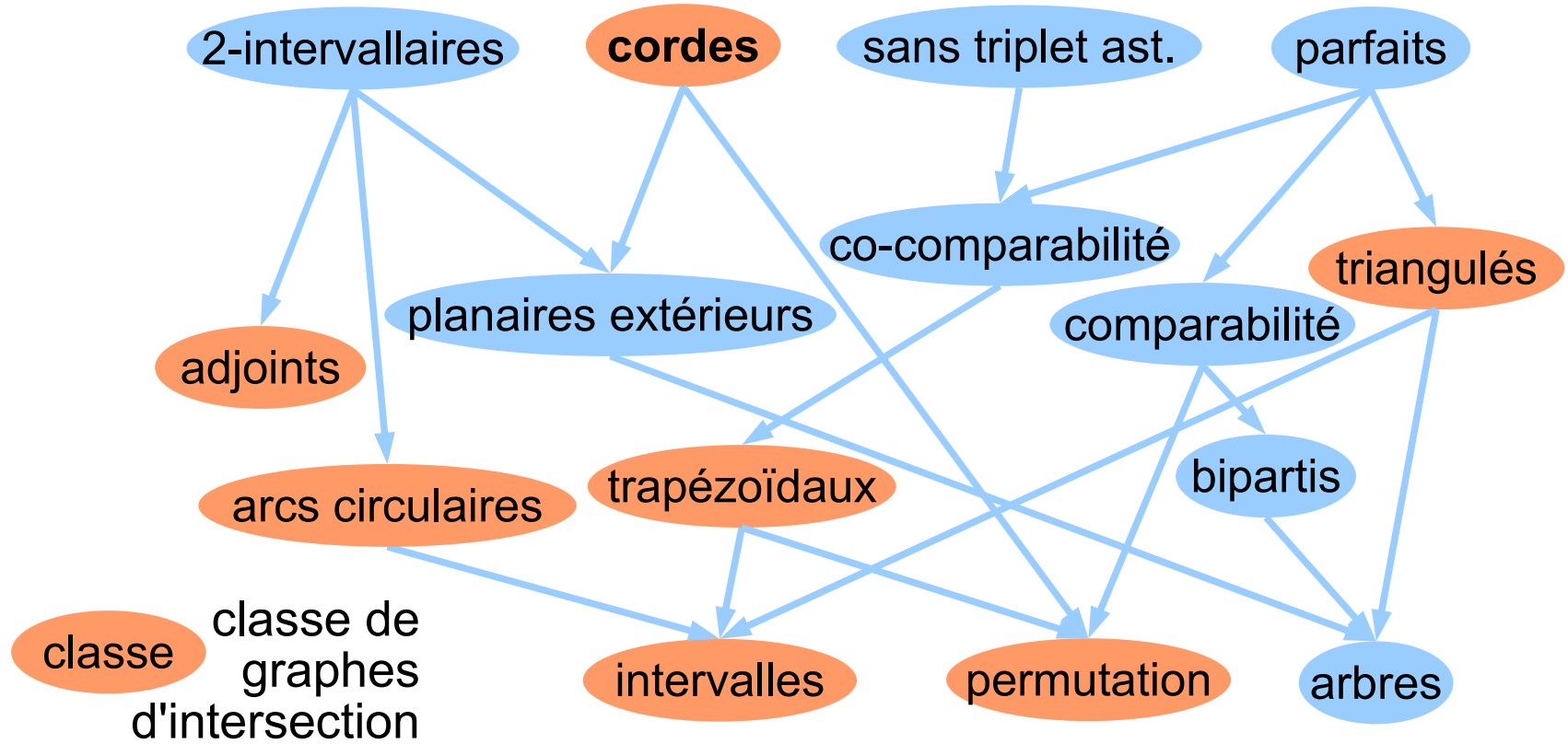
# Graphe d'inclusion des classes de graphes



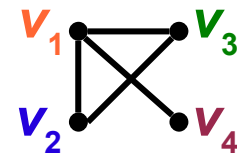
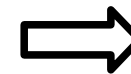
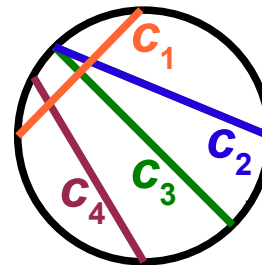
Graphe **triangulé** :  
 graphe d'intersection  
 d'une famille de  
**sous-arbres d'un arbre.**



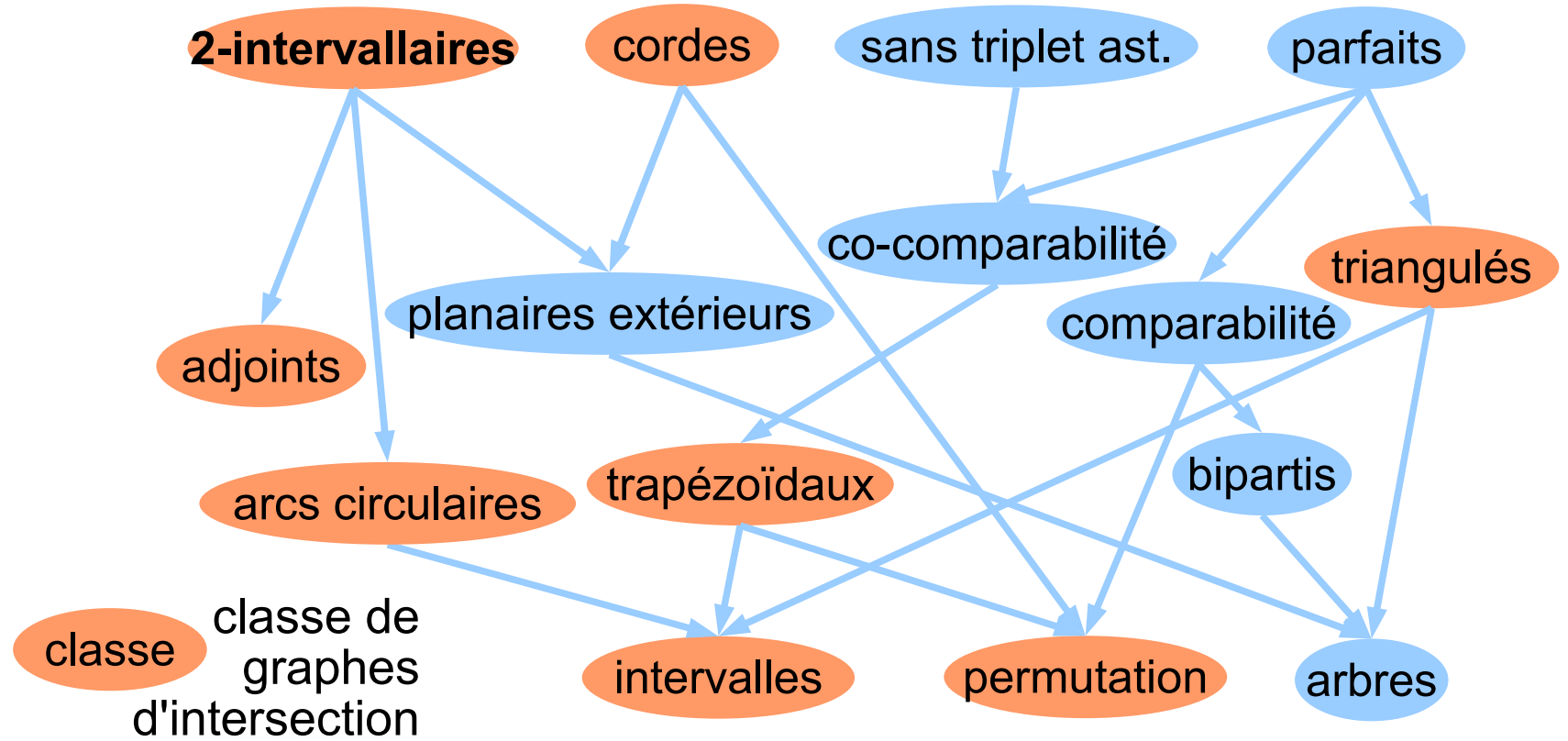
# Graphe d'inclusion des classes de graphes



Graphe de cordes :  
 graphe d'intersection des  
 cordes d'un cercle.

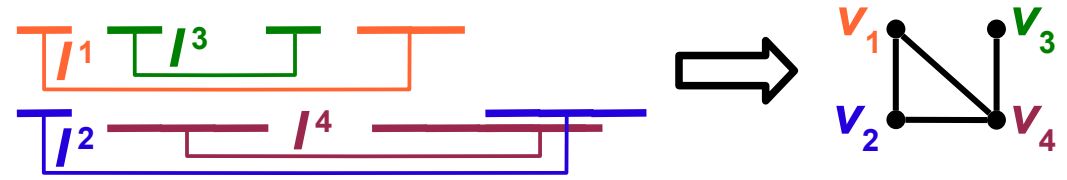


# Graphe d'inclusion des classes de graphes



classe de graphes d'intersection

The star of the show, graphe **2-intervallaire** : graphe d'intersection d'unions de deux intervalles.



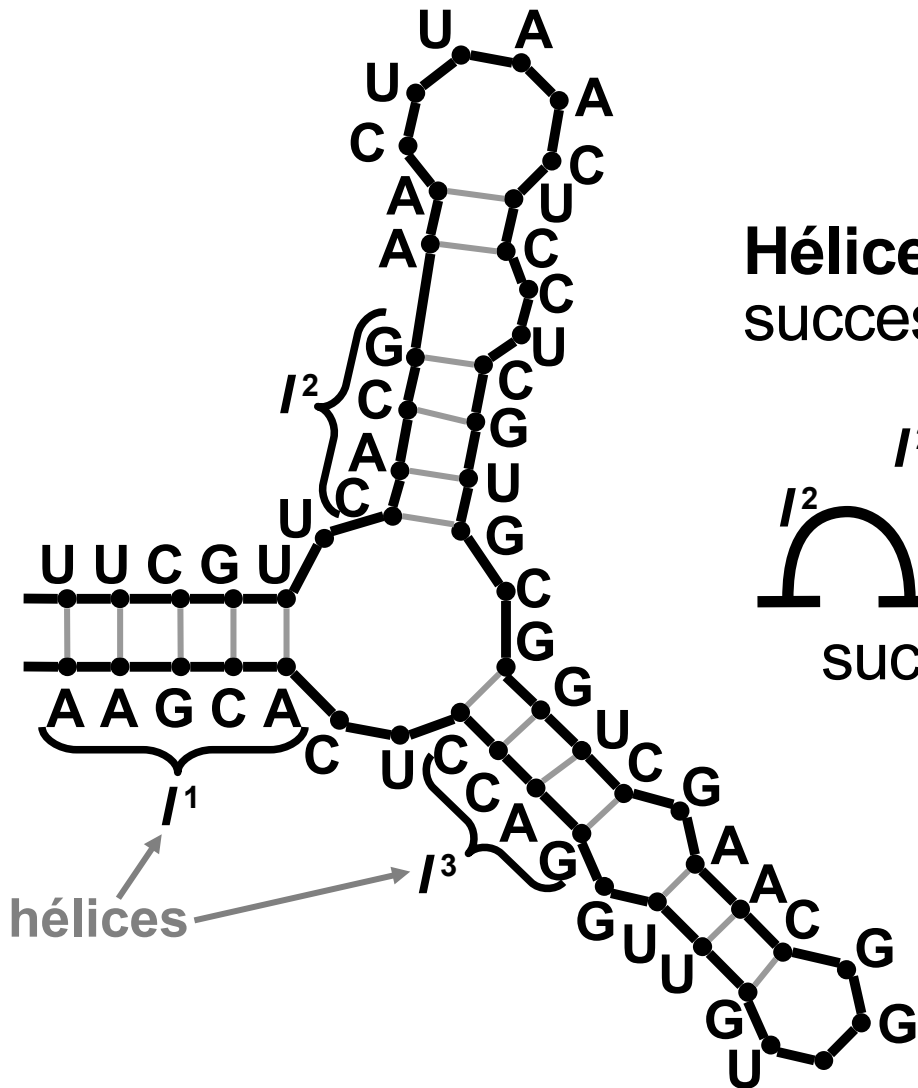
# Motivations

---

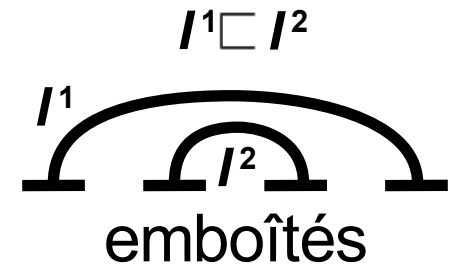
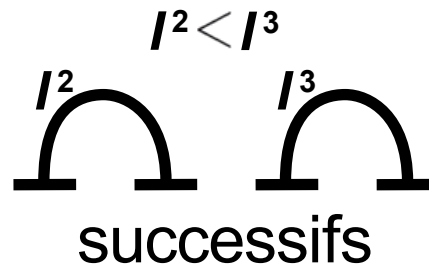
Un **2-intervalle** modélise :

- une tâche coupée en 2 dans un problème d'**ordonnement**
- deux portions similaires ou complémentaires inversées d'**ADN**
- deux portions complémentaires et inversées d'**ARN**
- deux extraits « mis en relation » dans une **partition musicale**

# Motivations : cas de l'ARN



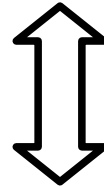
**Hélices** : appariements de portions successives ou emboîtées d'ARN.



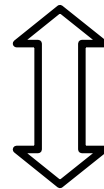


# Vers la théorie des graphes : stable max

Trouver les **hélices** d'un ARN sans pseudo-noeud donné comme une suite de nucléotides.



Trouver le plus **grand sous-ensemble** de 2-intervalles **disjoints**, uniquement **successifs ou emboîtés**, dans un ensemble de 2-intervalles.



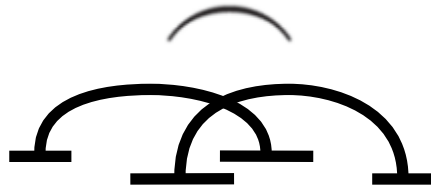
Trouver le **stable maximum** du graphe tel que :

- les **sommets** correspondent aux **2-intervalles**,
- une **arête** joint deux 2-intervalles qui **s'intersectent**,
- une **arête** joint deux 2-intervalles **croisés**.

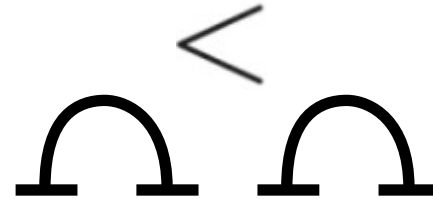
# Graphes 2-intervallaires et variantes

16 variantes de la classe des graphes de 2-intervalles :

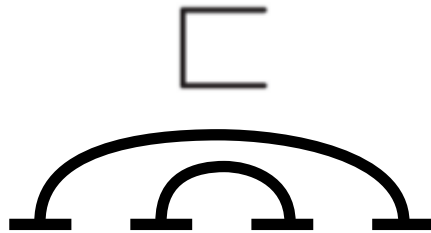
- les **sommets** correspondent aux **2-intervalles**
- une **arête** joint deux 2-intervalles qui sont :



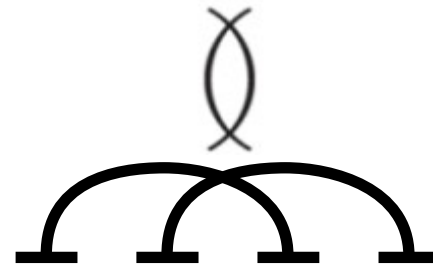
intersectants



successifs



emboîtés



croisés

↳ 8 classes à caractériser (et leur complémentaire)

# Graphes 2-intervallaires et restrictions

**Support** d'un ensemble de 2-intervalles :

ensemble des **intervalles support** des 2-intervalles.

Support sans restriction : 

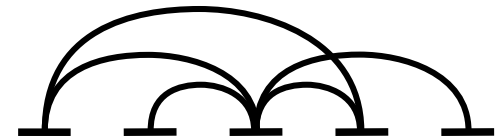
Support **équilibré** : 

Support **unitaire** : 

Support **disjoint** : 

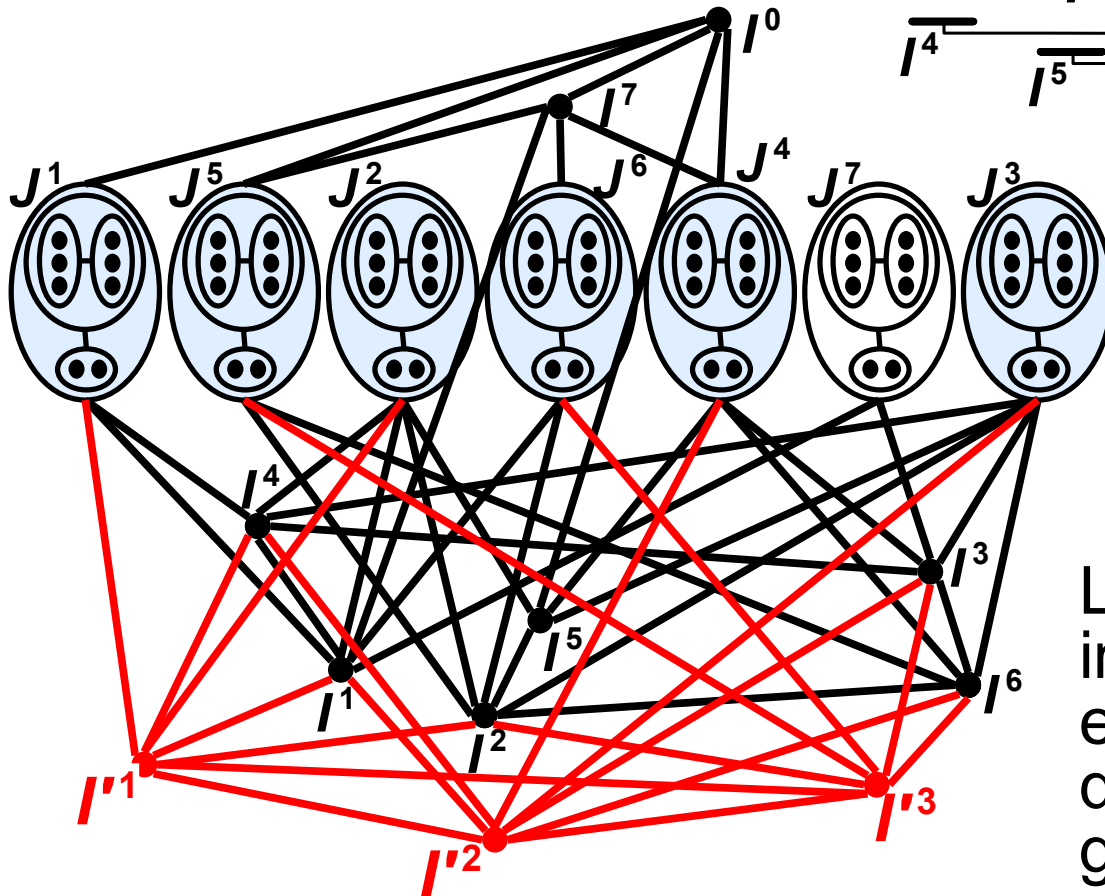
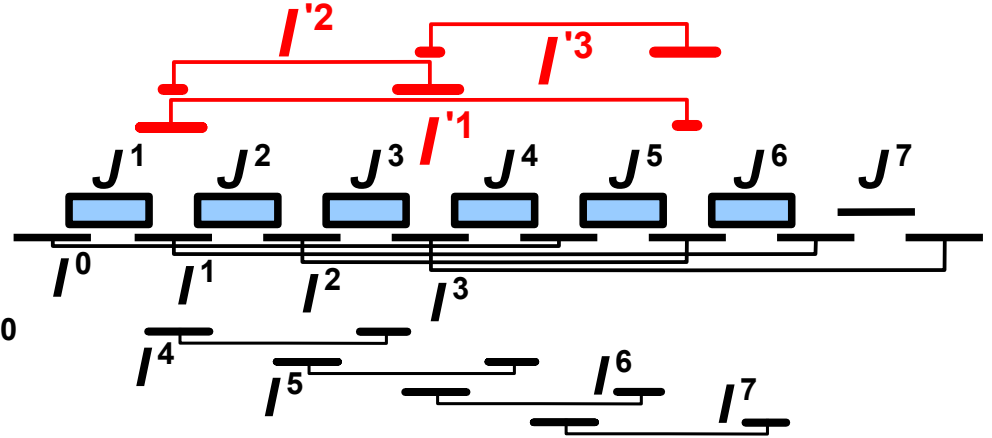
↳ graphes (1,1)-intervallaires

↳ séquences arc-annotées :



# Classe des 2-intervallaires équilibrés

Graphe 2-intervallaire non équilibrable, et une réalisation en 2-intervalles



La classe des 2-intervallaires équilibrés est **strictement incluse** dans la classe des graphes 2-intervallaires.

# Variantes des graphes 2-intervallaires

Support :

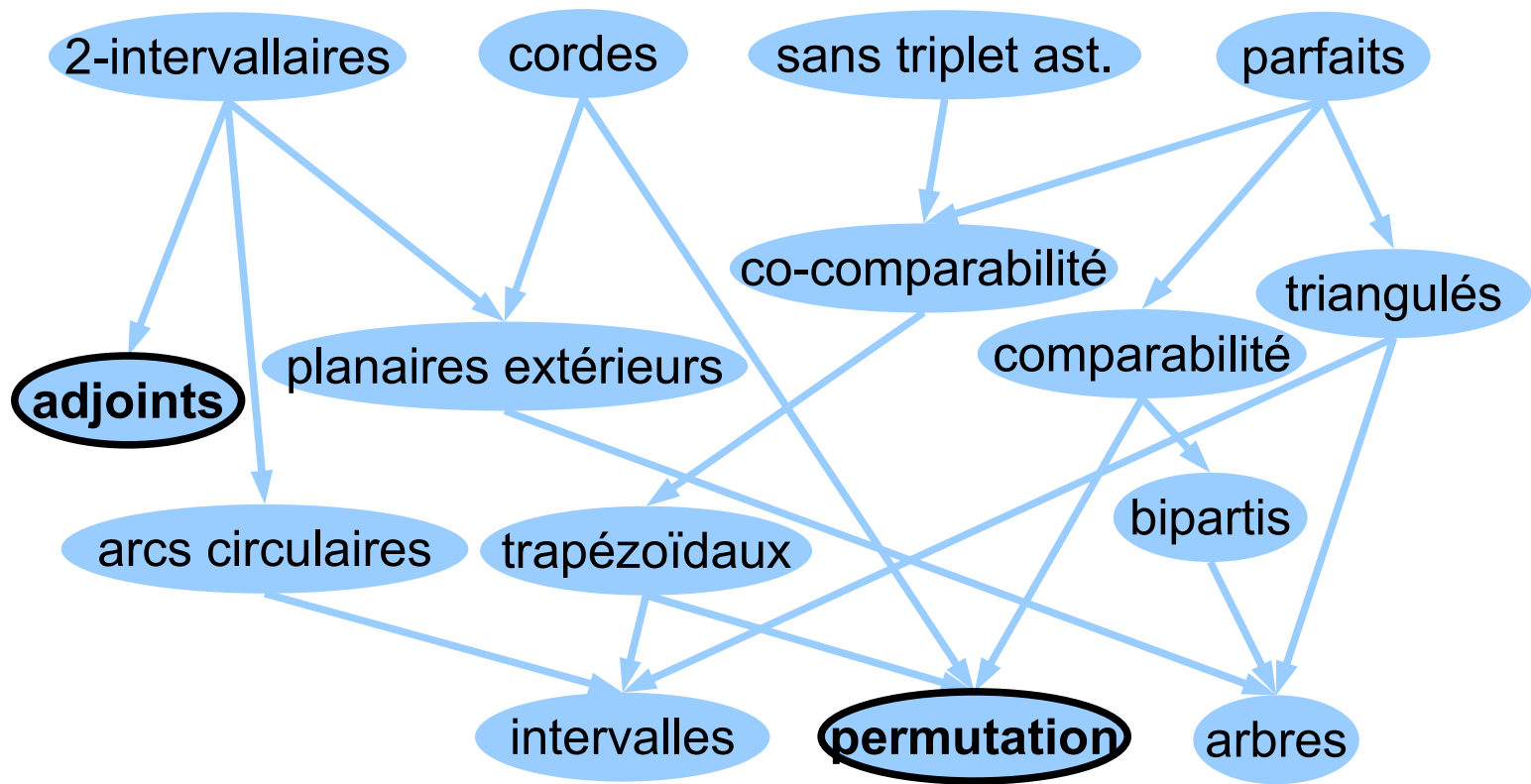
sans restriction

disjoint

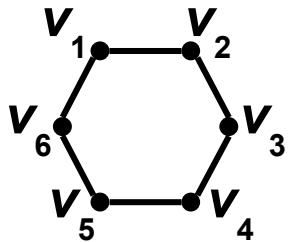
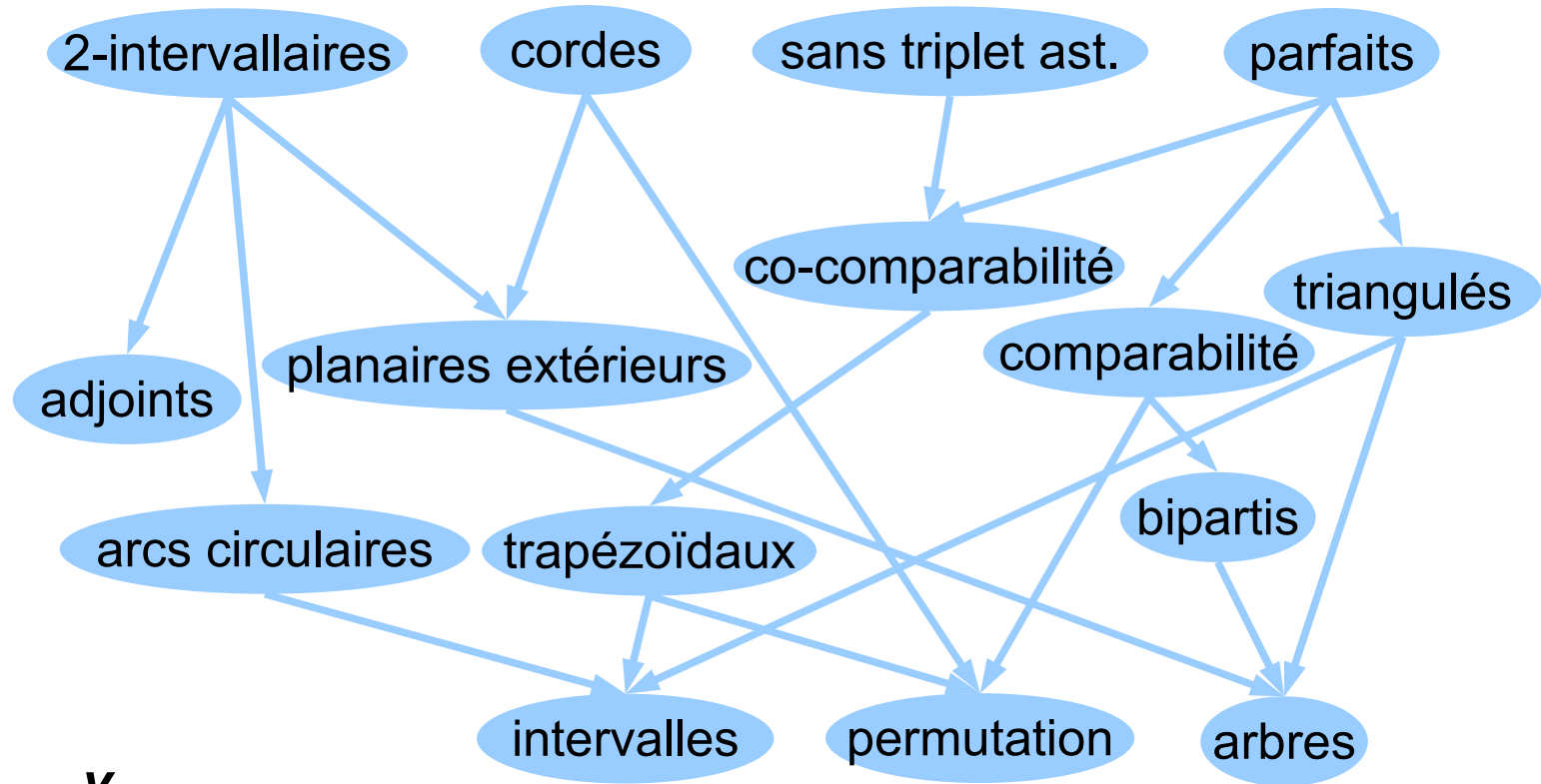
$\{\frown, \sqsubset, <, \bowtie\}$	clique	clique
$\{\frown\}$	2-intervallaires	(1,1)-intervallaires
$\{\frown, \sqsubset\}$	Classes inconnues, stable max NP-complet	Classe inconnue, stable max inconnu
$\{\frown, <\}$		Classe inconnue, stable max polynomial
$\{\frown, \bowtie\}$	Inclusions utiles dans des classes de graphes	cordes
$\{\frown, \sqsubset, <\}$		<u>cordes</u>
$\{\frown, \sqsubset, \bowtie\}$	intervalles	intervalles
$\{\frown, <, \bowtie\}$	trapézoïdaux	permutation

# Classe des $\{\frown, \square\}$ -(1,1)-intervallaires

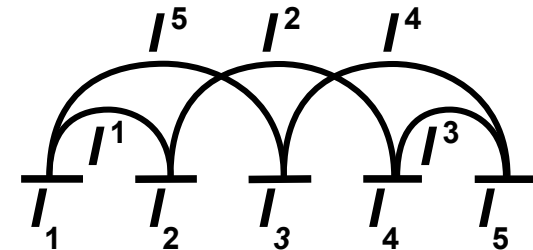
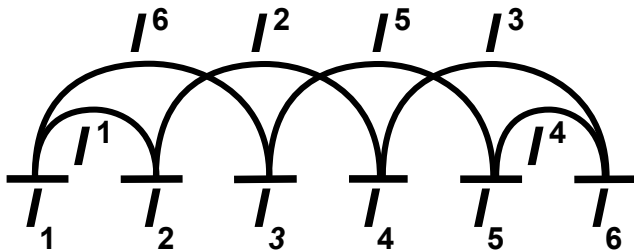
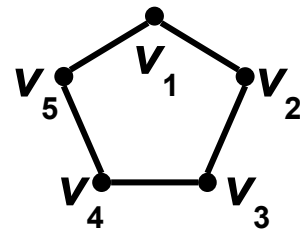
Un graphe  $\{\frown, \square\}$ -(1,1)-intervallaire est l'union  
d'un **graphe adjoint** et d'un **graphe de permutation**.



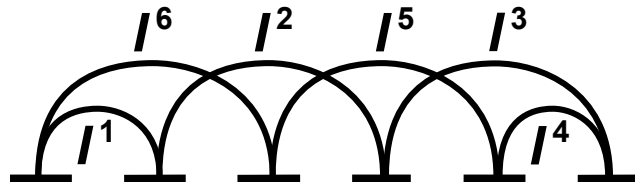
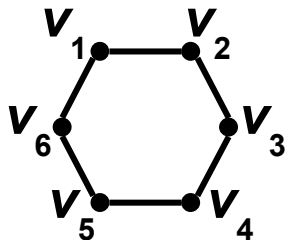
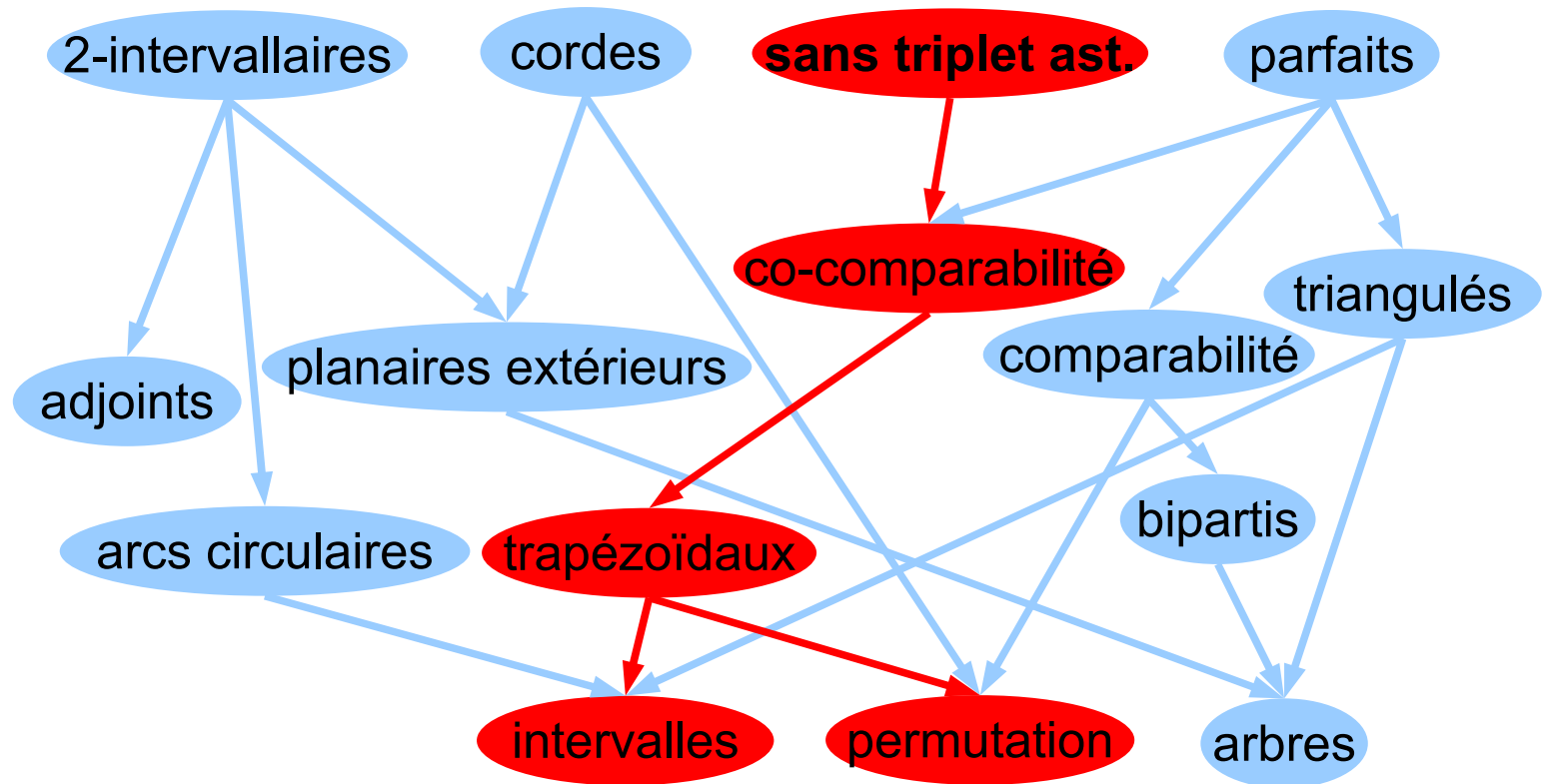
# Classe des $\{\cap, \sqsubset\}$ -(1,1)-intervallaires



Les **cycles** sont des graphes  $\{\cap, \sqsubset\}$ -(1,1)-intervallaires.



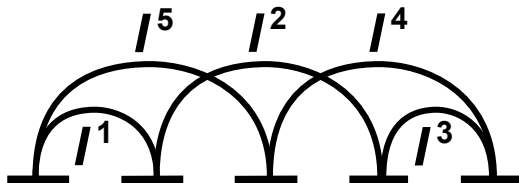
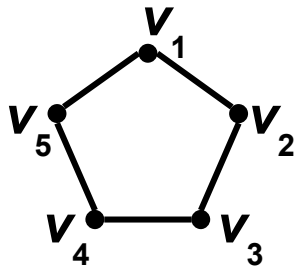
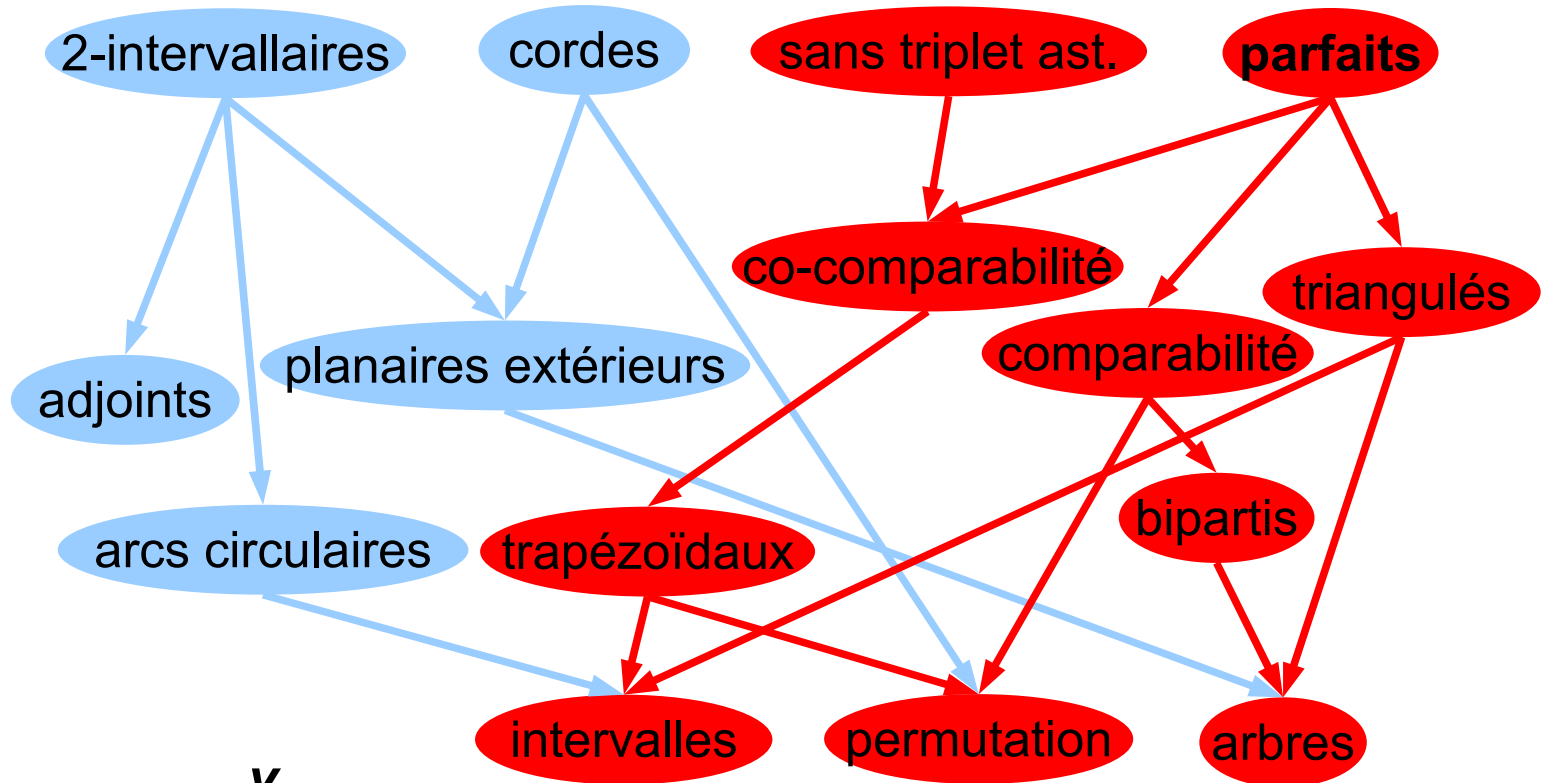
# Classe des $\{\cap, \sqsubset\}$ -(1,1)-intervallaires



**classe** classe de graphes ne contenant pas celle des  $\{\cap, \sqsubset\}$ -(1,1)-intervallaires

Les **cycles** sont des graphes  $\{\cap, \sqsubset\}$ -(1,1)-intervallaires.

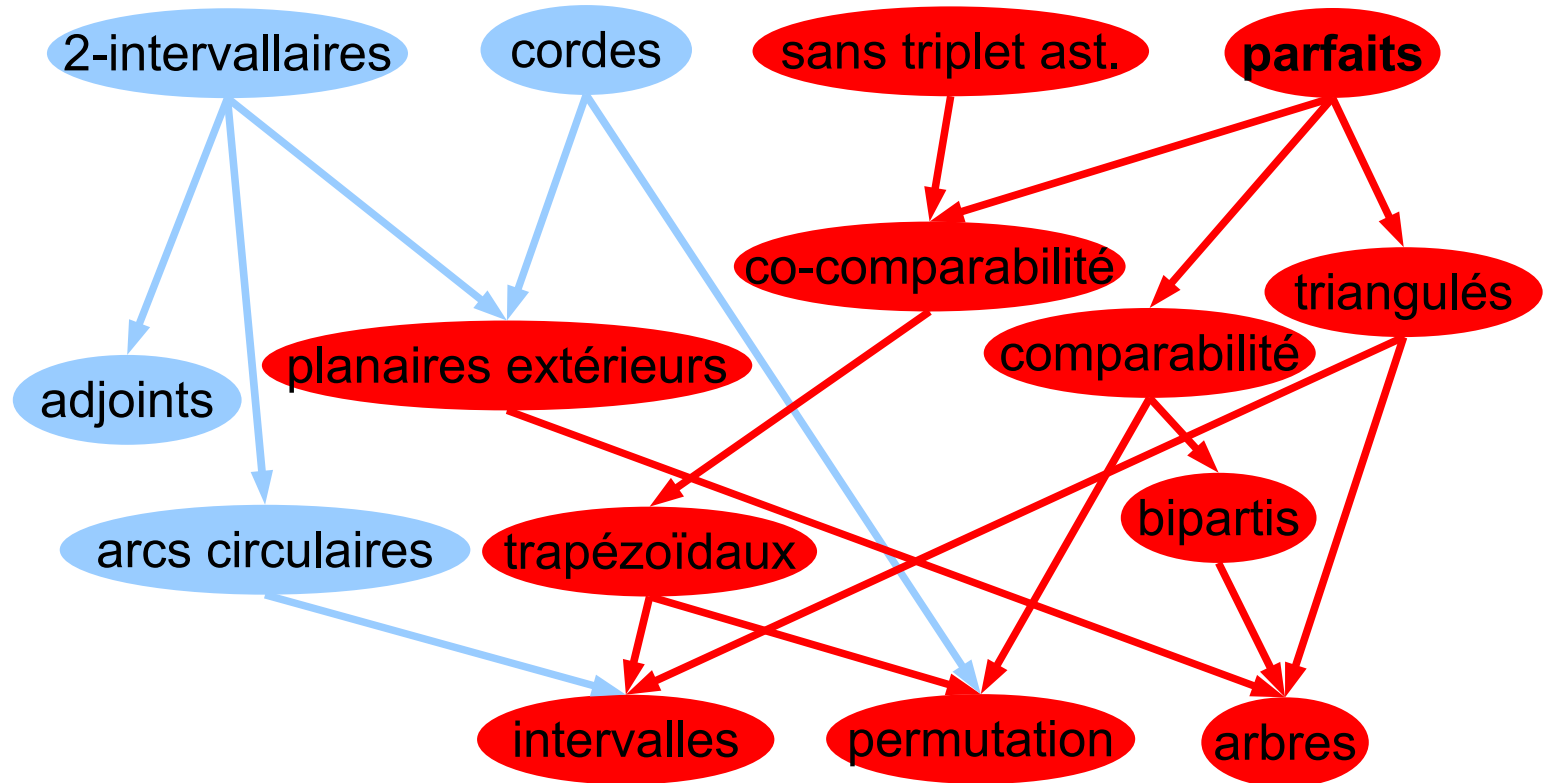
# Classe des $\{\cap, \sqsubset\}$ -(1,1)-intervallaires



**classe** classe de graphes ne contenant pas celle des  $\{\cap, \sqsubset\}$ -(1,1)-intervallaires

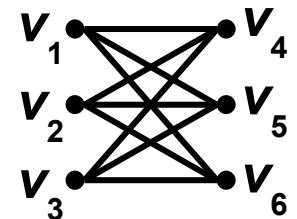
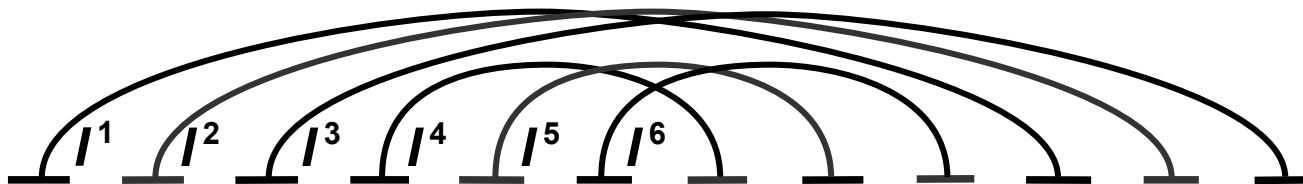
Les **cycles** sont des graphes  $\{\cap, \sqsubset\}$ -(1,1)-intervallaires.

# Classe des $\{\cap, \sqsubset\}$ -(1,1)-intervallaires

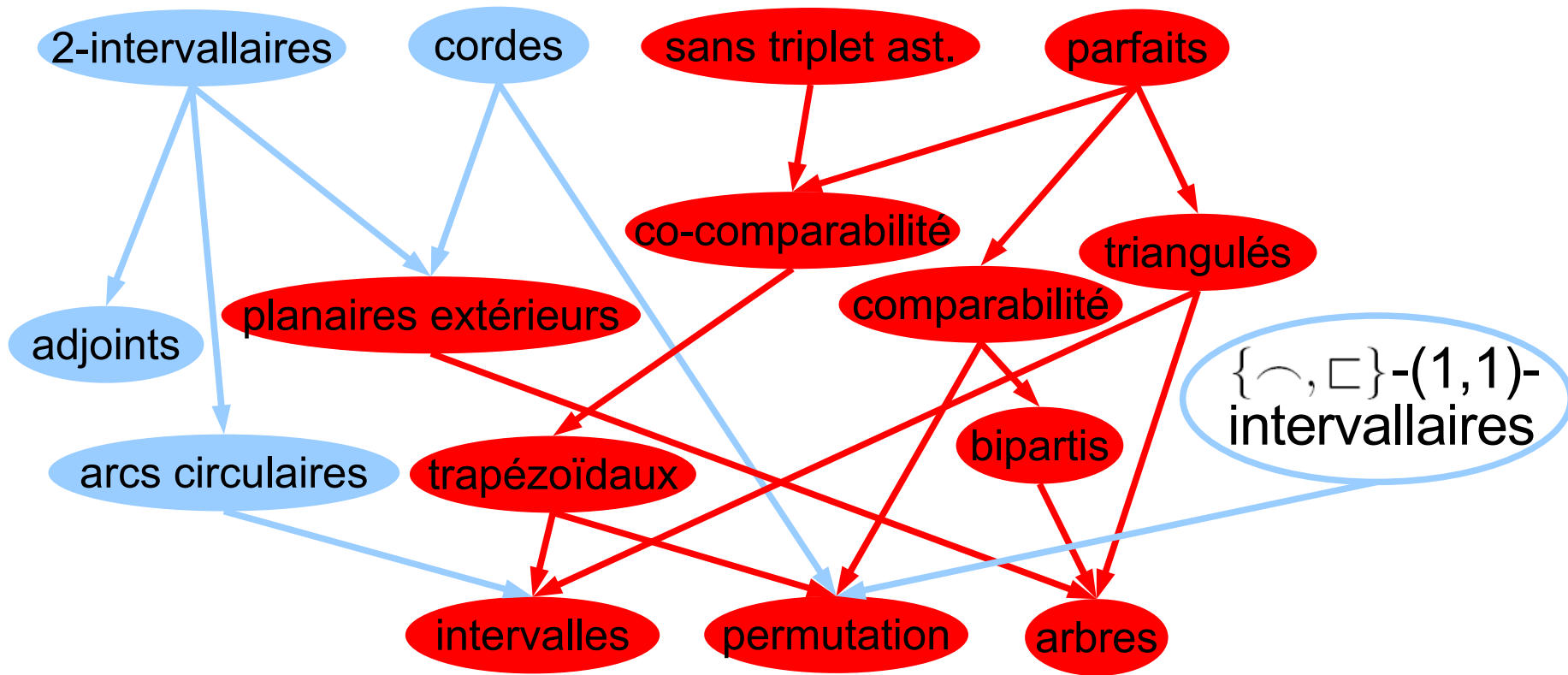


Les **bipartis complets** sont des graphes  $\{\cap, \sqsubset\}$ -(1,1)-intervallaires.

**classe** classe de graphes ne contenant pas celle des  $\{\cap, \sqsubset\}$ -(1,1)-intervallaires



# Classe des $\{\curvearrowright, \sqsubset\}$ -(1,1)-intervallaires



**classe** classe de graphes ne contenant pas celle des  $\{\curvearrowright, \sqsubset\}$ -(1,1)-intervallaires

Les **graphes de permutation** sont des graphes  $\{\curvearrowright, \sqsubset\}$ -(1,1)-intervallaires.

# Classe des $\{\cap, \square\}$ -(1,1)-intervallaires

Trouver des **graphes interdits** :

- Y en a-t-il, de quelle taille ?
- Peut-on en exhiber ?

# Classe des $\{\curvearrowright, \square\}$ -(1,1)-intervallaires

Trouver des **graphes interdits** :

- Y en a-t-il, de quelle taille ?
- Peut-on en exhiber ?

Tous les graphes  
à 5 noeuds ou moins sont  
 $\{\curvearrowright, \square\}$ -(1,1)-intervallaires.

# Classe des $\{\frown, \square\}$ -(1,1)-intervallaires

Trouver des **graphes interdits** :

- Y en a-t-il, de quelle taille ?

↳ Majorer le nombre de graphes  $\{\frown, \square\}$ -(1,1)-intervallaires à  $n$  noeuds.

# Classe des $\{\frown, \square\}$ -(1,1)-intervallaires

Trouver des **graphes interdits** :

- Y en a-t-il, de quelle taille ?

↳ Majorer le nombre de graphes  $\{\frown, \square\}$ -(1,1)-intervallaires à  $n$  noeuds.

↳ par le nombre de séquences arc-annotées à  $n$  arcs.

# Énumération des séquences arc-annotées

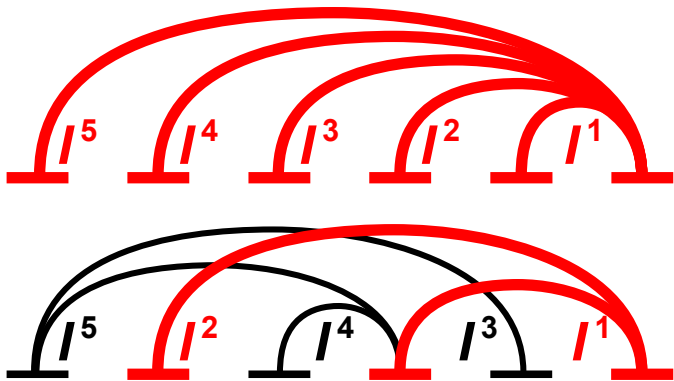
Trouver des **graphes interdits** :

- Y en a-t-il, de quelle taille ?

↳ Majorer le nombre de graphes  $\{\frown, \sqsupset\}$ -(1,1)-intervallaires à  $n$  noeuds.

↳ par le nombre de séquences arc-annotées à  $n$  arcs.

Nombre de séquences arc-annotées à  $n$  arcs et  $e$  extrémités  
(récursivement par rapport aux extrémités)



$$AA(n, e) = 1_{e=n+1} +$$

$$\sum_{x=1}^{e-1} \sum_{y=0}^x AA(n-x, e-1-y) \binom{e-1}{y} \binom{e-1-y}{x-y}$$

# Énumération des séquences arc-annotées

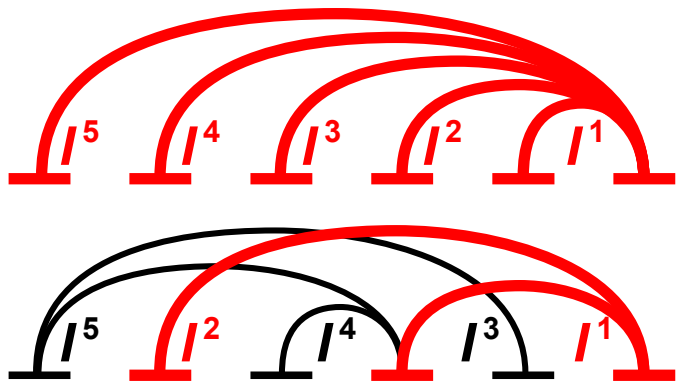
Trouver des **graphes interdits** :

- Y en a-t-il, de quelle taille ?

↳ Majorer le nombre de graphes  $\{\frown, \square\}$ - $(1,1)$ -intervallaires à  $n$  noeuds.

↳ par le nombre de séquences arc-annotées à  $n$  arcs.

Nombre de séquences arc-annotées à  $n$  arcs et  $e$  extrémités  
(récursivement par rapport aux extrémités)



$$AA(n, e) = 1_{e=n+1} +$$

$$\sum_{x=1}^{e-1} \sum_{y=0}^x AA(n-x, e-1-y) \binom{e-1}{y} \binom{e-1-y}{x-y}$$

$$AA(n) = \sum_{e=1}^{2n} AA(n, e)$$

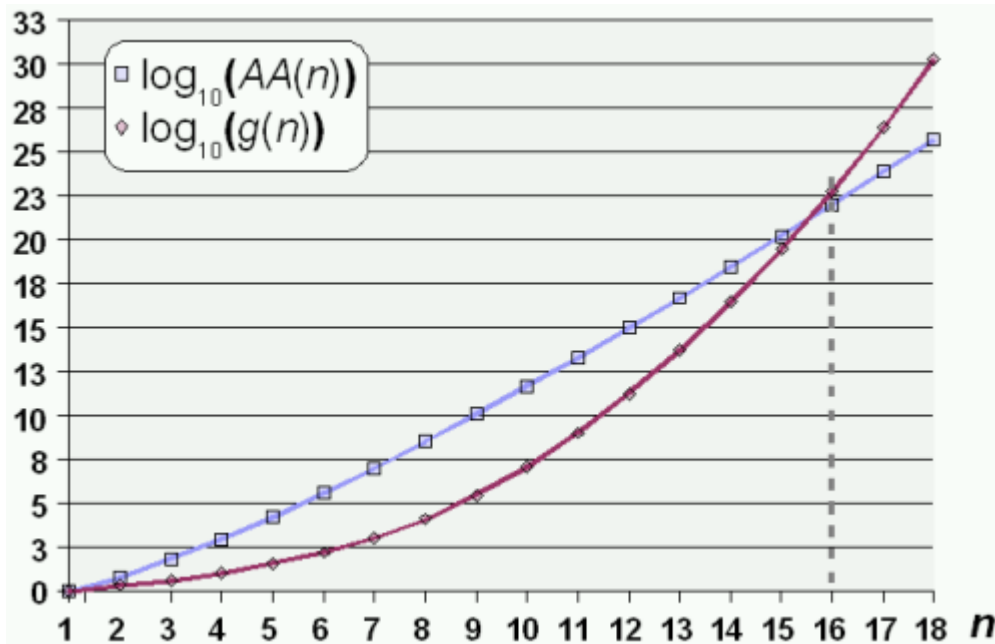
# Classe des $\{\curvearrowright, \square\}$ -(1,1)-intervallaires

Trouver des graphes interdits :

- Y en a-t-il, de quelle taille ?

↳ Majorer le nombre de graphes  $\{\curvearrowright, \square\}$ -(1,1)-intervallaires à  $n$  noeuds.

↳ par le nombre de séquences arc-annotées à  $n$  arcs.

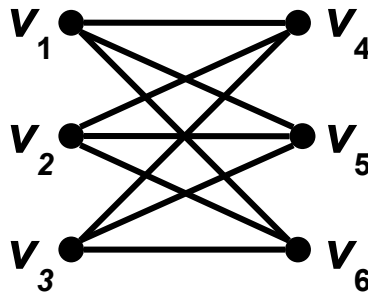


Il existe un graphe à 16 noeuds qui n'est pas  $\{\curvearrowright, \square\}$ -(1,1)-intervallaire.

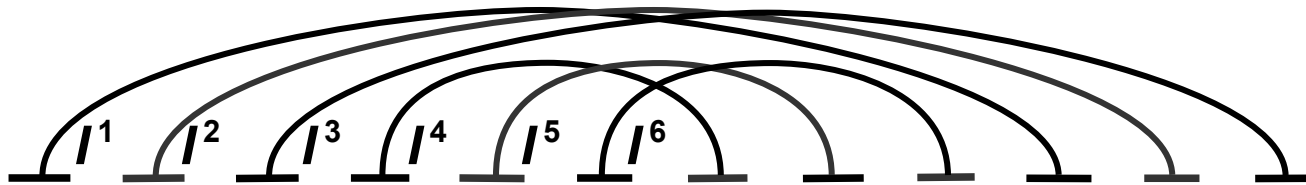
# Classe des $\{\cap, \sqcup\}$ -(1,1)-intervallaires

Trouver des **graphes interdits** :

- Y en a-t-il, de quelle taille ? *Il en existe, de taille 16.*
- Peut-on en exhiber ? *On en exhibe un de taille 9 :*



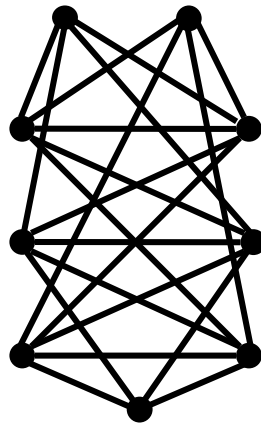
a 40 réalisations en  
séquence arc-annotée.



# Classe des $\{\cap, \sqcup\}$ -(1,1)-intervallaires

Trouver des **graphes interdits** :

- Y en a-t-il, de quelle taille ? *Il en existe, de taille 16.*
- Peut-on en exhiber ? *On en exhibe un de taille 9 :*



n'a aucune réalisation en  
séquence arc-annotée.

Ce graphe **n'est pas**  $\{\cap, \sqcup\}$ -(1,1)-intervallaire.

# Conclusion

- Une synthèse sur les graphes 2-intervallaires et les algorithmes de résolution du stable max sur diverses classes apparentées.
- De nouveaux résultats :
  - l'inclusion stricte de la classe des graphes 2-intervallaires équilibrés dans celle des 2-intervallaires.
  - des formules de dénombrement des séquences arc-annotées.
  - quelques éléments de caractérisation de la classe des graphes  $\{\cap, \sqcup\}$ -(1,1)-intervallaires.
- Un problème de complexité qui reste ouvert.

Piste pour un algorithme polynomial : caractérisation en partant du diagramme de Hasse.